FORMULARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $f(t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

TRANSFORMADAS DE ALGUNAS FUNCIONES BÁSICAS.

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, $\quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1,2,3..$ $\quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\quad \mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$, $\quad \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$, $\quad \mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$,

PRIMER TEOREMA DE TRASLACIÓN. (en el dominio de s)

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\; a \in \Re$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$, o bien $e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$

FUNCIÓN ESCALON UNITARIO $\quad \mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$

SEGUNDO TEOREMA DE TRASLACIÓN. (en el dominio de t)

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\; a \in \Re$, entonces

$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$

FORMA ALTERNA DEL 2° TEOREMA DE TRASLACIÓN

$\mathcal{L}\{g(t)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t+a)\}$

DERIVADAS DE TRANSFORMADAS

Si $\quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, n = 1,2,3,...$ $\quad$ entonces $\quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\{F(s)\}$

TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA.

Si $\quad f'(t), f''(t),..., f^{(n-1)}(t)$ son las derivadas de $f(t)$ y $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

DEFINICIÓN DE CONVOLUCIÓN

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad \text{propiedad: } f * g = g * f$$

TEOREMA DE CONVOLUCIÓN.

$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$, o bien $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$

De otra forma: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right\} = F(s)G(s)$

IMPULSO UNITARIO $\delta_a(t-t_0)=\begin{cases}0, & 0\le t<t_0-a\\ \dfrac{1}{2a}, & t_0-a\le t<t_0+a\\ 0 & t>t_0+a\end{cases}$, Para $a>0,\quad t_0>0$

Se conoce como impulso unitario porque tiene la propiedad $\int_0^\infty \delta_a(t-t_0)dt=1$

TRANSFORMADA DE LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC.

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0},\ \text{para } t_0\neq 0;\qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\}=1,\ \text{para } t_0=0$$

TRANSFORMADA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$, de orden exponencial y periodo T, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

SERIE DE FOURIER PARA $f(t)$ EN EL INTERVALO (-p, p).

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right],\qquad \text{con } a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx,\qquad b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN PAR E IMPAR.

$f(t)$ es par en I, si $f(-t)=f(t),\forall t\in I$

$f(t)$ es impar en I, si $f(-t)=-f(t),\forall t\in I$

SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PAR EN (-p, p) ES LA SERIE DE COSENOS:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right],\ \text{con } a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

SERIE DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN IMPAR EN (-p, p) ES LA SERIE DE SENOS:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right],\ \text{con } b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$