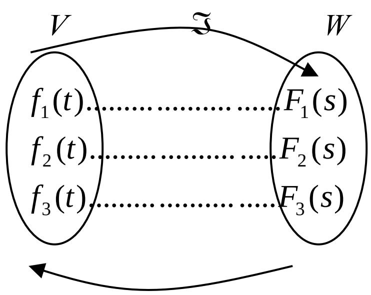
ECUACIONES DIFERENCIALES.

TEMA 3. TRANSFORMADA DE LAPLACE.



Definición de la trasformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s) \quad t>0, s>0$$

e^{-st} kérnel o núcleo de transformación

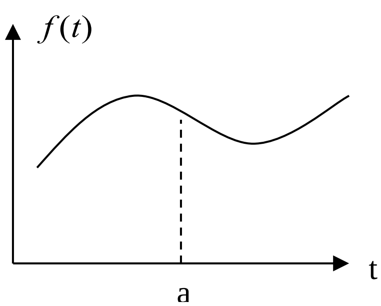
Para que a $f(t)$ se le pueda aplicar la trasformada de Laplace debe tener las siguientes condiciones:

1. Sea seccionalmente continua (continua a tramos).

2. Sea de orden exponencial

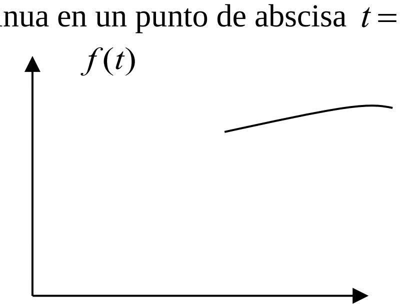
Recordando: Una función $f(t)$ es continua en un punto de abscisa $t=a$ si cumple 3 condiciones:

1. $\lim_{t \to a} f(t) \exists$
2. $f(a) \exists$
3. $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$

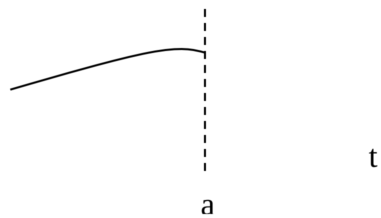


$f(t)$ es una función seccionalmente continua en un punto de abscisa $t=a$ si

1. $\lim_{t \to a^-} f(t) \exists$



2. $\lim_{t \to a^+} f(t) \exists$
3. $\lim_{t \to a^-} f(t) \exists \neq \lim_{t \to a^+} f(t) \exists$



Contraejemplo $f(t) = \tan t$ $\qquad t = \dfrac{\pi}{2}$

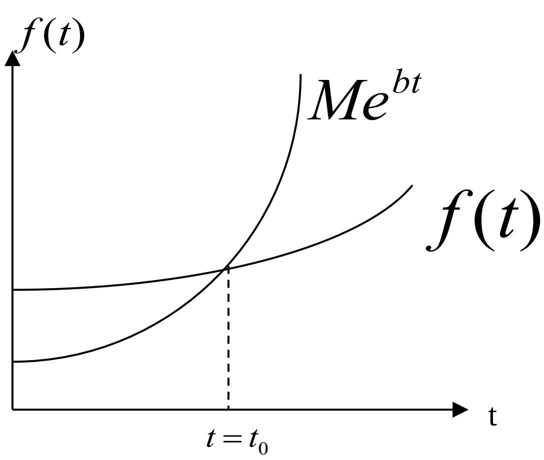
1. $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan t = \infty \ \exists$
2. $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \tan t = -\infty \ \exists$

$f(t) = \tan t$ no es seccional mente continua en $t = \dfrac{\pi}{2}$.

QuickTime™ and a
TIFF (Uncompressed) decompressor
are needed to see this picture.

Orden exponencial.

$f(t)$ es una función de orden exponencial si al compararla con una función exponencial de la forma Me^{bt} donde M, b son constantes positivas. Si existe un punto de abscisa $t = t_0$ a partir del cual la función Me^{bt} crece más rápidamente que $f(t)$



$f(t) \leq Me^{bt}$ para $t \geq t_0$

Ejemplo:
$f(t) = 2 \qquad Me^{bt} \qquad M = b = 1$

$f(t) = t$
$f(t) = e^t$

$f(t)=e^{t^2}$ $\qquad$ $f(t)=e^{t^2}$ no es de orden exponencial.

Para una función seccionalmente continua:

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) & 0\le t \prec a \\ f_2(t) & a\le t\prec b \\ .... & \\ f_3(t) & t\ge n \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^a e^{-st}f_1(t)dt+\int_a^b e^{-st}f_2(t)dt+....+\int_n^\infty e^{-st}f_n(t)dt$$

Obtener la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<a \\ 1 & t\ge a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}&=\int_0^a e^{-st}(0)dt+\int_a^\infty e^{-st}dt\\ &=-\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}e^{-st}\Big|_a^b=-\frac{1}{s}\left[0-e^{-sa}\right]=\frac{1}{s}e^{-sa}\end{aligned}$$

$$f(t)=\begin{cases} 1-t & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}&=\int_0^1 e^{-st}\left(1-t\right)dt+\int_1^\infty e^{-st}\left(0\right)dt\\ &=\int_0^1 e^{-st}dt+\int_0^1 -te^{-st}dt\\ &=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1+\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^1+\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^1\\ &=-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s^2}\\ &=\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\end{aligned}$$

Trasformada de Laplace de Funciones Elementales.

Para $f(t)=0$

$$\mathcal{L}\{0\}=\int_0^{\infty}0dt=0$$

Para $f(t)=1$

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^{\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}e^{-sb}\Big|_0^{b}=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$$

Para $f(t)=t$

$$\mathcal{L}\{t\}=\int_0^{\infty}te^{-st}dt=-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{s^2}[0-1]=\frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$$

Para $f(t)=t^2$

$$\mathcal{L}\{t^2\}=\int_0^{\infty}t^2e^{-st}dt=-\frac{t^2}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{2t}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{2}{s^3}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=-\frac{2}{s^3}[0-1]$$

$$\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{0\}=0$$

$$\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{k\}=\frac{k}{s} \qquad k=cte$$

$$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$$ $s\succ 0$ $\quad$ n es entero no negativo.

$$\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^3\}=\frac{6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

Para

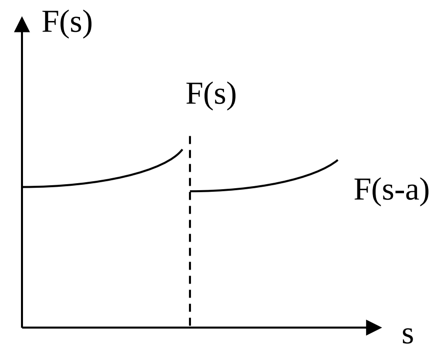
$$f(t) = e^{at} \qquad a \in \Re$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s-a}(-1)$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$

Primer teorema de translación. (En el dominio de s)

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \bullet e^{at}\right\} = F(s)\Big|_{s \to (s-a)} = F(s-a)\square$$



Como la transformada de Laplace es un operador lineal únicamente se define:

$$\mathcal{L}\left\{af(t) \pm bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \pm b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

No se define

$$\mathcal{L}\left\{af(t) \cdot bg(t)\right\} \neq a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \cdot b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{g(t)}\right\} \neq \frac{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}}$$

Sea $f(t) = \cosh kt = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$

$$\mathcal{L}\left\{\cosh t\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-kt}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cosh t\right\} = \frac{s}{s^2 - k^2} \qquad s \succ k$$

$$\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{kt}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+k}\right) = \frac{k}{s^2-k^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{k}{s^2-k^2} \qquad s \succ k$$

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos kt dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cos kt\right)_0^\infty - \frac{1}{s}e^{-st}\sin kt\Big|_0^\infty + \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos kt dt$$

$$= \left[\frac{k^2}{s^2}+1\right]^{-1}\frac{1}{s} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2} \qquad \text{s>0}$$

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2} \qquad s > 0$$

Teorema:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \qquad \text{n entero no negativo.}$$

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Obtenga las siguientes transformadas de Laplace.

$\mathcal{L}\{t^2e^{4t}\} \Rightarrow$ Por el primer teorema de traslación.

$$\mathcal{L}\{t^2e^{4t}\} = \frac{2}{s^3}\Big|_{s\to(s-4)} = \frac{2}{(s-4)^3}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{4t}\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{s-4}\right] = \frac{2}{(s-4)^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{3/2}\right\} = \mathcal{L}\left\{t \bullet t^{1/2}\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}\right] = -\left[-\frac{3\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{3/2}\right\} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}}$$

Trasformada Inversa de Laplace.

- Por inspección (tablas)
- Por Fracciones parciales
- Por Convolución.

Obtener la trasformada inversa de Laplace de las siguientes funciones.

$$F(s) = \frac{1}{s^5}$$

$$f(t) = \frac{1}{4!}t^4$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 7}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t$$

$$F(s) = \frac{-2s+6}{s^2+4} = -\frac{2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}$$

$$f(t) = -2\cos 2t + 3\sin 2t$$

$$F(s) = \frac{(s+1)^3}{s^4} = \frac{s^3+3s^2+3s+1}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{1}{s^4}$$

$$f(t) = 1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$$

$$F(s)=\frac{s+1}{s^2-1}=\frac{s}{s^2-1}+\frac{1}{s^2-1}$$
$$f(t)=\cosh t+\sinh t$$

Método de Fracciones Parciales.

Sea $F(s)=\dfrac{Q(s)}{R(s)}$ donde $Q(s)$ y $R(s)$ son funciones polinomiales.

Primer caso. $R(s)$ tiene raíces reales distintas.

$$\frac{Q(s)}{R(s)}=\frac{Q(s)}{(s-a)(s-b)\ldots(s-n)}=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s-b}+\ldots+\frac{N}{s-n} \qquad a\neq b\neq \ldots\neq n$$

donde A, B, …, N son constantes a determinar.

Segundo caso. $R(s)$ tiene raíces reales repetidas.

$$\frac{Q(s)}{R(s)}=\frac{Q(s)}{(s-a)^k}=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{(s-a)^2}+\ldots\ldots+\frac{K}{(s-a)^k}$$ K grado de multiplicidad.

Tercer caso. $R(s)$ tiene raíces complejas.

$$\frac{Q(s)}{R(s)}=\frac{Q(s)}{as^2+bs+c}=\frac{As+B}{as^2+bs+c}$$

as^2+bs+c Expresión cuadrática irreducible

Primer Caso.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

$$F(s)=\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4}$$

$$s^2+6s+9=A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)$$

Para $s=1$

$$16=A(-1)(5)$$

$$A=-\frac{16}{5}$$

Para $s=2$

$$s=2$$

$$25=B(1)(6)$$

$$B=\frac{25}{6}$$

Para $s=-4$

$$1=C(-5)(-6)$$

$$C=\frac{1}{30}$$

$$F(s)=\frac{-\frac{16}{5}}{s-1}+\frac{\frac{25}{6}}{s-2}+\frac{\frac{1}{30}}{s+4}$$

$$f(t)=-\frac{16}{5}e^{t}+\frac{25}{6}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-4t}$$

Segundo Caso.

$$F(s)=\frac{2s+5}{(s-3)^2}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{(s-3)^2}$$

$$2s+5=A(s-3)+B$$

Para $s=3$

$$11=B$$

Si $11=B$

$$s=1$$

$$7=-2A+11$$

$$A=2$$

$$F(s)=\frac{2}{s-3}+\frac{11}{(s-3)^2}$$

$$f(t)=2e^{3t}+11te^{3t}$$

Tercer caso.

$$F(s)=\frac{6s^2+50}{(s+3)(s^2+4)}=\frac{A}{s+3}+\frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$6s^2+50=A(s^2+4)+(Bs+C)(s+3)$$

Para $s=-3$	para $s=0$	para $s=1$
$104=13A$	$50=32+3C$	$56=40+4B+24$
$A=8$	$C=6$	$B=-2$

$$F(s)=\frac{8}{s+3}+\frac{-2s+6}{s^2+4}$$

$$F(s)=\frac{8}{s+3}-\frac{2s}{s^2+4}+\frac{6}{s^2+4}$$

$$f(t)=8e^{-3t}-2\cos 2t+3\sin 2t$$

$$F(s)=\frac{4s}{4s^2+1}=\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}$$

$$f(t)=\cos\frac{t}{2}$$

$$F(s)=\frac{6s+3}{s^2+4s+6}=\frac{6s}{(s+2)^2+2}+\frac{3}{(s+2)^2+2}$$

$$F(s)=6\,\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+2}-\frac{3}{(s+2)^2+2}$$

$$F(s)=\frac{6(s+2)}{(s+2)^2+2}-\frac{9}{(s+2)^2+2}$$

$$f(t)=6e^{-2t}\cos\sqrt{2}t-\frac{9}{\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}=\frac{1}{(s+2)^2+4}$$

$$f(t)=\frac{1}{4}e^{-2t}\sin 4t$$

Trasformada de Laplace de las derivadas sucesivas de la función $f(t)$ (clase A).

Se puede demostrar que si $f(t)$ tiene las características anteriores, sus derivadas sucesivas $f^{'}(t), f^{''}(t)$..... también son seccionalmente continuas y de orden exponencial, por lo tanto, son susceptibles de aplicarles la transformada de Laplace empleando la definición:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt=F(s)$$

hagamos $f(t)\to f'(t)$

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f'(t)dt$$

Integrando por partes

$$u=e^{-st} \qquad dv=f^{'}(t)dt$$
$$du=-se^{-st} \qquad v=f(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{f'\,t)\right\}=-f(0)+s\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}-f(0)$ Trasformada de Laplace de $f^{'}(t)$

Hagamos:

$$f'(t)\to f''(t)$$
$$f(t)\to f'(t)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Transformada de Laplace de $f''(t)$

De la misma manera

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Generalizando

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots.. - f^{(n-1)}(0)$$

Solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes empleando la Trasformada de Laplace.

Sea la ecuación diferencial:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots\ldots. + a_{n-1} y' + a_n y = Q(t) \ldots\ldots.(1)$$

Paso 1. Se aplica la trasformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (1).

Paso 2. Se sustituyen las condiciones iniciales.

Paso 3. Se resuelve la expresión anterior para $Y(s)$, es decir se obtiene la solución algebraica.

Paso 4. Aplicamos la transformada inversa a $Y(s)$ para obtener la solución de la ecuación diferencial propuesta.

Resuelva las siguientes Ecuaciones Diferenciales empleando la Transformada de Laplace.

$$\frac{dy}{dt} - y = 1 \qquad y(0) = 0$$

$$y' - y = 1$$

$$sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s-1) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}$$

$$1=A(s-1)+Bs \qquad A=-1 \qquad B=1$$

$$Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}$$

Antitransformando

$$y(t)=-1+e^{t}$$

$$y'+6y=e^{4t} \qquad y(0)=2$$

$$sY(s)-y(0)+6Y(s)=\frac{1}{s-4}$$

$$Y(s)(s+6)-2=\frac{1}{s-4}$$

$$Y(s)=\frac{2s-7}{(s+6)(s-4)}=\frac{A}{s+6}+\frac{B}{s-4}$$

$$2s-7=A(s-4)+B(s+6) \qquad A=\frac{19}{10} \qquad B=\frac{1}{10}$$

$$Y(s)=\frac{19}{10}\frac{1}{s+6}+\frac{1}{10}\frac{1}{s-4}$$

$$y(t)=\frac{19}{10}e^{-6t}+\frac{1}{10}e^{4t}$$

$$y'' - y' = e^t \cos t \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - sY(s) + y(0) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$Y(s)\left(s^2 - s\right) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{\left(s^2-s\right)\left[(s-1)^2+1\right]} = \frac{s-1}{\left(s^2-2s+2\right)(s-1)s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2-2s+2\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2-2s+2)}$$

$$1 = A(s^2-2s+2) + (Bs+C)s \qquad A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{s+1}{2(s-1)^2+1}$$

Antitransformando.

$$y(t) = \frac{1}{2} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s}{2(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{s-1+1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

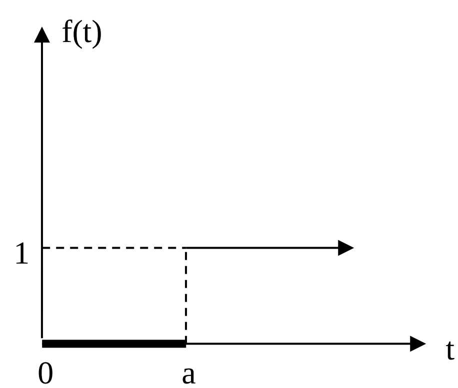
$$y(t) = \frac{1}{2} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t$$

Función escalón unitario.

Sea la función.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < a \\ 1 & t \ge a \end{cases}$$



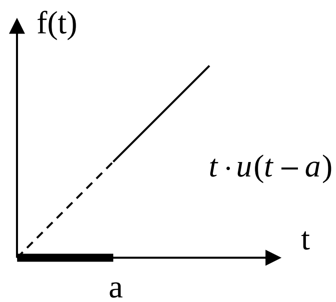
Transformada de Laplace de la función escalón unitario.

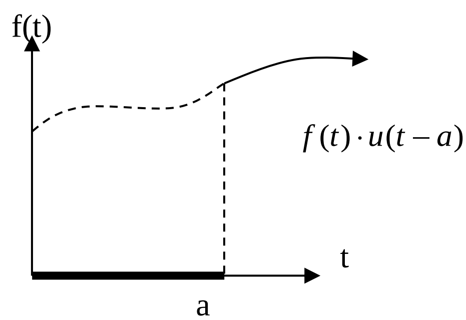
$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}(t-a)\right\} = \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}(t-a)\right\} = -\frac{1}{s}\lim_{b\to\infty} e^{-st}\Big|_a^b = -\frac{1}{s}\left[0 - e^{-as}\right] = \frac{1}{s}e^{-as}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{U}(t-a)\right\} = \frac{1}{s}e^{-as}$$

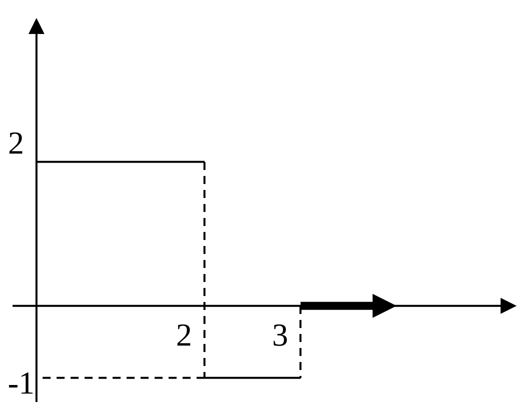
Aplicando la función escalón unitario a una función $f(t)$, gráficamente se anula la función hasta el valor $t = a$.





Función expresada en términos de las funciones escalón unitario.

Determine la Transformada de Laplace de la función expresada en la figura.



$$f(t)\begin{cases} 2 & 0 \le t < 2 \\ -1 & 2 \le t < 3 \\ 0 & t \ge 3 \end{cases}$$

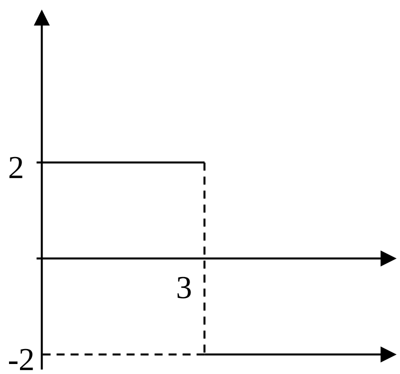
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\int_0^2 e^{-st}dt - \int_2^3 e^{-st}dt + \int_0^\infty e^{-st}(0)dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_0^2 + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_2^3 = -\frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-3s} + \frac{2}{s}$$

$$f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{3}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-3s}$$



$$f(t)\begin{cases} 2 & 0 \le t < 3 \\ -2 & t \ge 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\int_0^3 e^{-st}dt - 2\int_3^\infty e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_o^3 + \frac{2}{s}e^{-st}\Big|_3^\infty = -\frac{2}{s}e^{-3s} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-3s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{4}{s}e^{-3s} + \frac{2}{s}$$

$$f(t) = 2 - 4u(t-3)$$

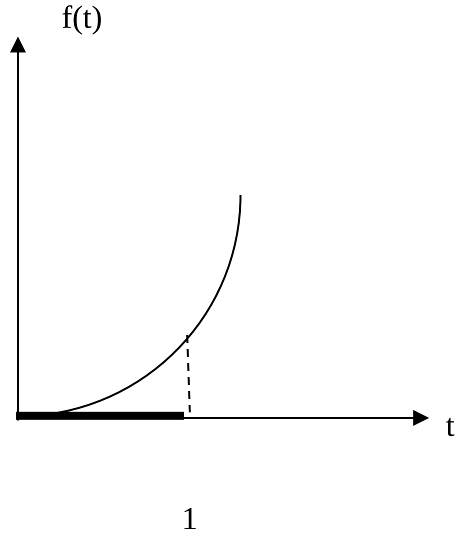
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s}e^{-3s}$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t \prec 1\\ t^2 & t\ge 1\end{cases}$$

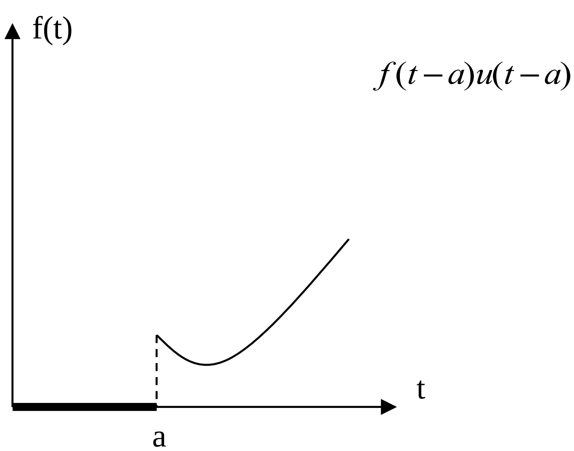
$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^1 e^{-st}(0)dt+\int_1^\infty t^2e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\left[-\frac{t^2}{s}e^{-st}-\frac{2t}{s^2}e^{-st}-\frac{2}{s^3}e^{st}\right]_1^\infty$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=-\frac{1}{s}e^{-t}-\frac{2}{s^2}e^{-t}-\frac{2}{s^3}e^{-t}$$



Segundo Teorema de Traslación (En el dominio de t).



$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=F(s)e^{-as}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-as}\}=f(t-a)u(t-a)$$

Ejemplo.

$$\mathcal{L}\{tu(t-2)\} = \mathcal{L}\{(t-2+2)u(t-a)\}$$
$$= \mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{2u(t-2)\}$$
$$= \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s}e^{-2s}$$

$$\mathcal{L}\{t^2u(t-2)\} = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4$$
$$t^2 = (t-2)^2 + 4t - 4$$
$$t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2+2) - 4$$
$$t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4$$
$$\mathcal{L}\{t^2u(t-2)\} = \Im\{(t-2)^2 u(t-2)\}\mathcal{L}\{4(t-2)u(t-2)\} + \mathcal{L}\{4u(t-2)\}$$
$$\mathcal{L}\{t^2u(t-2)\} = \frac{2}{s^3}e^{-2s} + \frac{4}{s^2}e^{-2s} + \frac{4}{s}e^{-2s}$$

Forma alterna del segundo teorema de Traslación.

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{g(t-a)\}$$

Ejemplos.

$$\mathcal{L}\{tu(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{(t-2)\}$$
$$= e^{-2s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right]$$
$$\mathcal{L}\{tu(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{(t-2)^2\}$$
$$= e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2 + 4t + 4\}$$
$$= e^{-2s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right]$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin t u\left(t-\pi\right)\right\} = e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{\sin\left(t+\pi\right)\right\}$$
$$= e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{\sin t \cos \pi + \sin \pi \cos t\right\}$$
$$= e^{-\pi s}\mathcal{L}\left\{-\sin t\right\}$$
$$\mathcal{L}\left\{\sin t u\left(t-\pi\right)\right\} = -e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Resolver:

$$y' + y = f(t) \qquad y(0) = 0 \qquad \text{donde} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 1 \\ 5 & t \ge 1 \end{cases}$$
$$sY(s) - y(0) + Y(s) = 5\mathcal{U}(t-1)$$
$$\left(s+1\right)Y(s) = \frac{5}{s}e^{-s}$$
$$Y(s) = \underbrace{\frac{5}{s(s+1)}}_{H(s)}e^{-s}$$
$$H(s) = \frac{5}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$
$$5 = A\left(s+1\right) + Bs \qquad A = 5 \qquad B = -5$$
$$H(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s+1}$$

Antitransformando.

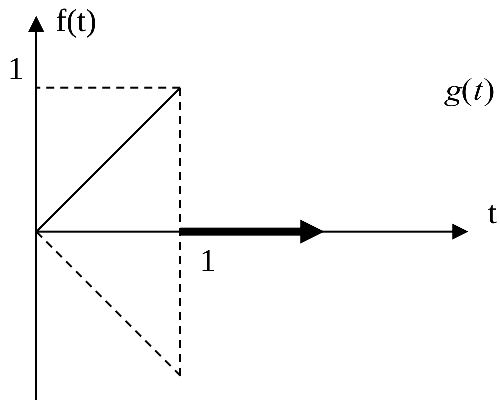
$$h(t) = 5 - 5e^{-t}$$
$$y(t) = \left[5 - 5e^{-(t-1)}\right]u(t-1)$$

Resolver.

$$y' + 2y = f(t) \qquad y(0) = 0 \qquad \text{Donde} \quad f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$$

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^\infty 0e^{-st}dt$$

$$sY(s) - 2Y(s) = -\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}$$



$$g(t) = -tu(t-1)$$

$$g(t) = -tu(t-1)$$

$$f(t) = t - tu(t-1)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - e^{-st}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right]$$

$$f(t) = t - (t-1)u(t-1) - u(t-1)$$

$$f(t) = t - t\,u(t-1)$$

$$f(t) = (t-1)u(t-1)$$

$y'' + y = f(t)$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad$ Donde $\quad f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \pi \\ 1 & \pi \le t < 2\pi \\ 0 & t \ge 2\pi \end{cases}$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s}e^{-\pi s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s}$$

$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s}e^{-\pi s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s}$$

$$Y(s)\left(s^2+1\right) = \frac{1}{s}e^{-\pi s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s} + 1$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}}_{H(s)}e^{-\pi s} - \underbrace{\frac{1}{s\left(s^2+1\right)}}_{H(s)}e^{-2\pi s} + \frac{1}{\left(s^2+1\right)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s\left(s^2+1\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{\left(s^2+1\right)}$$

$$1 = A\left(s^2+1\right) + Bs \qquad A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = 0$$

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{\left(s^2+1\right)}$$

$$h(t) = 1 - \cos t$$

$$\begin{aligned} h(t-\pi) &= 1 - \cos(t-\pi) \\ &= 1 - (\cos t\cos\pi + \sin t\sin\pi) \\ &= 1 + \cos t \end{aligned}$$

$\therefore$

$$y(t) = (1+\cos t)u(t-\pi) - (1+\cos t)u(t-2\pi) + \sin t$$

Convolución.

$$\boldsymbol{f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = h(t)}$$

Propiedades

1. $f * g = g * f$ Conmutatividad
2. $f * g * h = (f * g) * h = f * (g * h)$ Asociatividad.
3. $f * (af_1 + bf_2 + ... + nf_n) \quad a, b, ..., n = cts$
   $a(f * f_1) + b(f * f_2) + ... + n(f * f_n)$ Distributividad con respecto a la suma de funciones.

Teorema de Convolución.

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot(s)$$

Ejemplo.

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C+Ds}{(s^2+1)^2}$$

$$1 = (A+Bs)(s^2+1) + (C+Ds)$$

$$1 = As^2 + A + Bs^3 + Bs + C + Ds \qquad A = 0 \quad B = 0 \qquad D = 0 \qquad C = 1$$

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Del teorema de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t) = h(t)$$

Aplicando el teorema de convolución

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+1}\rightarrow f(t)=\sin t$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+1}\rightarrow g(t)=\sin t$$

$$h(t)=\sin t*\sin t=\int_0^t \sin(t-\tau)\sin\tau d\tau$$

$$h(t)=\int_0^t(\sin t\cos\tau-\sin\tau\cos t)\sin\tau d\tau$$

$$h(t)=\sin t\int_0^t \sin\tau\cos\tau d\tau-\cos t\int_0^t \sin^2\tau d\tau$$

$$h(t)=\frac{\sin t}{2}\sin^2\tau\Big|_0^t-\cos t\left[\int_0^t\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\tau d\tau\right)\right]$$

$$h(t)=\frac{\sin^3 t}{2}-\cos t\left[\frac{1}{2}\tau\Big|_0^t-\frac{1}{4}\sin 2\tau\Big|_0^t\right]$$

$$h(t)=\frac{\sin^3 t}{2}-\cos t\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]$$

$$h(t)=\frac{\sin^3 t}{2}-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\cos t\sin 2t \qquad \sin 2t=2\sin t\cos t$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\sin^3 t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\cos^2 t\sin t$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t$$

$$\mathcal{L}\{ f * g \} = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right\} = F(s) \bullet G(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t e^{t-\tau} d\tau \right\} = \frac{1}{s} \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s(s-1)}$$

Integral de Volterra

$$\boldsymbol{f(t)=g(t)+\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

Ejemplo:

$f(t)=1+\int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ Integral de Volterra.

$$\mathcal{L}\left\{ f(t)=1+\int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau \right\}$$

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}F(s)$$

$$F(s)\left[1-\frac{1}{s-1}\right]=\frac{1}{s}$$

$$F(s)=\left[\frac{s-1-1}{s-1}\right]=\frac{1}{s}$$

$$F(s)=\frac{s-1}{s(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}$$

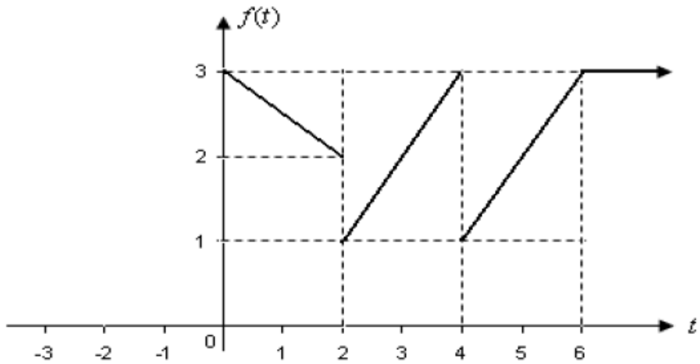
$$s-1=A(s-2)+Bs \qquad A=\frac{1}{2} \qquad B=\frac{1}{2}$$

$$F(s)=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s-2)}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}$$

FUNCIONES ESCALÓN UNITARIO Y RAMPA UNITARIA

Obtenga la transformada de Laplace de la función cuya gráfica se muestra a continuación



Aplicando la función escalón unitario:

$$f(t) = \left(3 - \frac{1}{2}t\right) - \left(3 - \frac{1}{2}t\right)u(t-2) + (-1+t)u(t-2) - (-1+t)u(t-4) + (-3+t)u(t-4) - (-3+t)u(t-6) + 3u(t-6)$$

$$\mathbf{L}\left\{f(t)\right\} = \mathbf{L}\left\{3 - \frac{1}{2}t\right\}$$
$$-e^{-2s}\mathbf{L}\left\{3 - \frac{1}{2}(t+2)\right\}$$
$$+e^{-2s}\mathbf{L}\left\{-1+(t+2)\right\}$$
$$-e^{-4s}\mathbf{L}\left\{-1+(t+4)\right\}$$
$$+e^{-4s}\mathbf{L}\left\{-3+(t+4)\right\}$$
$$-e^{-6s}\mathbf{L}\left\{-3+(t+6)\right\}$$
$$-e^{-6s}\mathbf{L}\left\{3\right\}$$

$$\mathbf{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{3}{s} - \frac{1}{2s^2}$$
$$-e^{-2s}\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{2s^2}\right)$$
$$+e^{-2s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$
$$-e^{-4s}\left(\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$
$$+e^{-4s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$
$$-e^{-6s}\left(\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$
$$+e^{-6s}\left(\frac{3}{s}\right)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathbf{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{3}{s} - \frac{1}{2s^2} - \frac{2}{s}e^{-2s} + \frac{1}{2s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} - \frac{3}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s}e^{-4s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s} - \frac{3}{s}e^{-6s} - \frac{1}{s^2}e^{-6s} + \frac{3}{s}e^{-6s}$$

Simplificando:

$$\boxed{\mathbf{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{3}{s} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{3}{2s^2}e^{-2s} - \frac{2}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-6s} \text{ Escriba aquí la ecuación.}}$$

Si

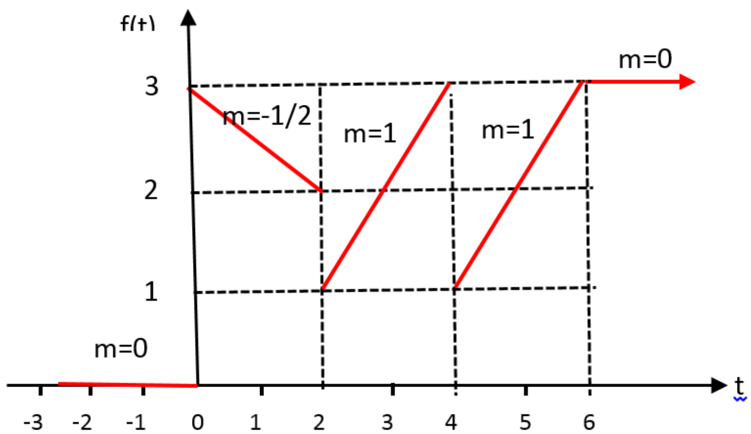
$f(t) = t = r(t)$ función rampa

Aplicando la transformada de Laplace a función rampa:

Formulario:

$$\mathbf{L}\ \{r(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathbf{L}\ \{r(t-a)\} = \frac{1}{s^2}e^{-as}$$



$$\mathbf{L}\ \{f(t)\} = \left(-\frac{1}{2} - 0\right) r(t) + 3u(t) + \left[1 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] r(t-2) - 1u(t-2) + (-2)u(t-4) + (0-1)r(t-6) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s} + \frac{3}{2}\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{2}{s}\cdot e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-6s}$$

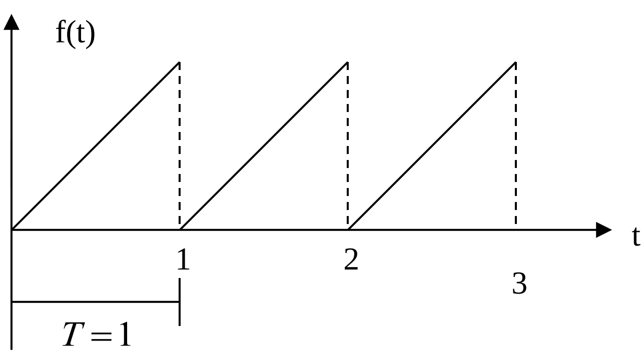
O sea:

$$\boxed{\mathbf{L}\ \{f(t)\} = -\frac{1}{2s^2} + \frac{3}{s} + \frac{3}{2s^2}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{2}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-6s}}$$

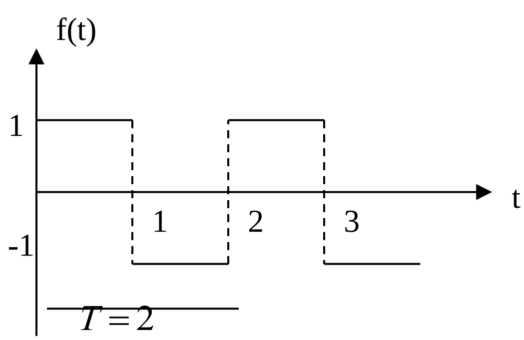
Transformada de una Función Periódica.

Si $f(t)$ es seccionalmente continua y de orden exponencial y de período T, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-st}}\int_0^T e^{-st} f(t)dt$$



Obtener la Transformada de Laplace de la función periódica representada en la figura siguiente.



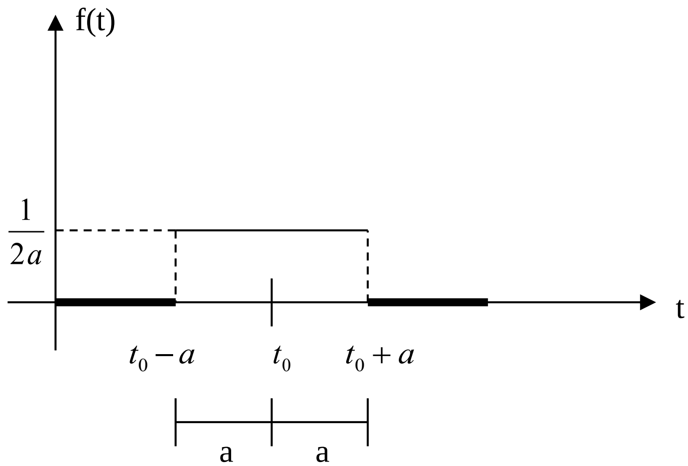
$$\mathcal{L}\left\{ f(t) \right\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} dt - \int_1^2 e^{-st} dt \right]$$

$$\mathcal{L}\left\{ f(t) \right\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{1}{1s} e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^2 \right]$$

$$\mathcal{L}\left\{ f(t) \right\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\frac{1}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s} e^{-s} \right]$$

Función Impulso Unitario o delta Dirac.

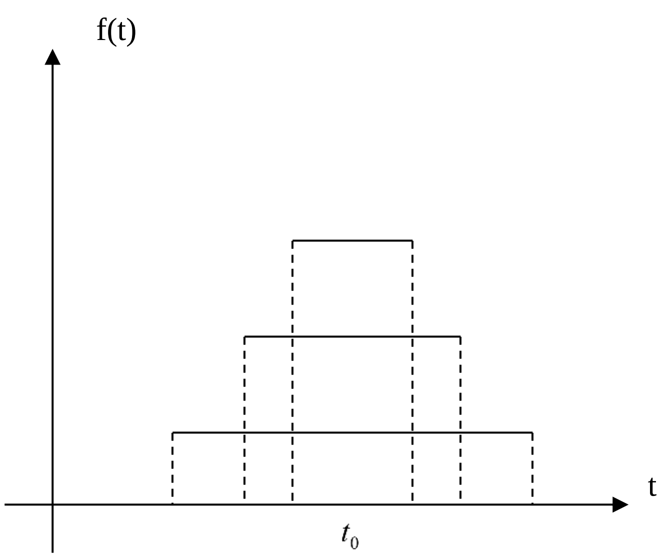
En muchos fenómenos mecánicos o eléctricos se presenta el caso de una excitación momentánea por ejemplo la aplicación de una fuerza intensa o de un voltaje (fem) intensa y momentánea.

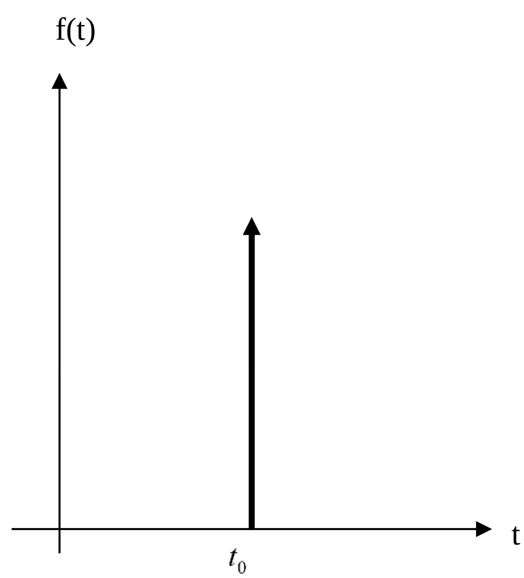


$$f(t) \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a} & t_0 - a \le t < t_0 - a \\ 0 & t \ge t_0 + a \end{cases}$$

$$f(t) = \delta_a \;\; t - t_0$$

Función pulso unitario.





Función impulso Unitario cuando $a \to 0$

Si
$a \to 0$

$\frac{1}{2a} \to \infty$

$\lim\limits_{a \to 0} \delta_a(t-t_0) = \delta(t-t_0)$ función impuso unitario o Delta de Dirac.

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\mathcal{L}\{t-t_0\} = \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$$

De la función pulso.

$$f(t) = \frac{1}{2a}u\left[t-(t_0-a))\right] - \frac{1}{2a}u\left[t-(t_0+a)\right]$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2as}e^{-(t_0-a)s} - \frac{1}{2as}e^{-(t_0+a)s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2as}\left[e^{-(t_0-a)s} - e^{-(t_0+a)s}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\left\{\frac{1}{2as}\left[e^{-(t_0-a)s} - e^{-(t_0+a)s}\right]\right\}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0}\left[\frac{e^{-t_0 s}e^{as} - e^{-t_0 s}e^{-as}}{2as}\right] = e^{-t_0 s}\lim_{a\to 0}\left[\frac{(e^{as} - e^{-as})}{2as}\right] =$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}\lim_{a\to 0}\left[\frac{(se^{as} + se^{-as})}{2s}\right] \qquad \text{se deriva con respecto a } a$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}\frac{2s}{2s} = e^{-t_0 s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-t_0 s} \quad \text{si} \quad t_0 \neq 0}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \text{si} \quad t_0 = 0}$$

Ejemplo 1

Resuelva:

$$y'' + y = 4\delta(t - 2\pi) \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 4e^{-2\pi s}$$

$$Y(s)(s^2 + 1) = 4e^{-2\pi s} + s$$

$$Y(s) = \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$y(t) = 4\sin(t - 2\pi)u(t - 2\pi) + \cos t$$

$$y(t) = \begin{cases} \cos t & 0 \le t \prec 2\pi \\ \cos t + 4\sin t & t \ge 2\pi \end{cases}$$

Ejemplo 2

Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$y'' - y = t - 2 \qquad y(2) = 3 \qquad y'(2) = 0$$
$$y(t+2) = x(t)$$
$$y'(t+2) = x'(t)$$
$$y''(t+2) = x''(t) \qquad x(0) = 3 \qquad x'(0) = 0$$
$$y''(t+2) - y(t+2) = (t+2) - 2$$
$$x''(t) - x(t) = t$$
$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$s^2 X(s) - 3s - X(s) = \frac{1}{s^2}$$
$$X(s)\left(s^2 - 1\right) = \frac{1}{s^2} + 3s = \frac{1 + 3s^3}{s^2}$$
$$X(s) = \frac{1 + 3s^3}{s^2\left(s^2 - 1\right)} = \frac{1 + 3s^2}{s^2(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1}$$
$$3s^3 + 1 = As(s+1)(s-1) + Bs(s+1)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+1)$$
$$A = 0 \qquad B = -1 \qquad C = 1 \qquad D = 2$$
$$X(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1}$$
$$x(t) = -t + e^{-t} + 2e^{t}$$

Pero

$$y(t+2) = x(t)$$
$$y(t) = x(t-2)$$
$$y(t) = -(t-2) + e^{-(t-2)} + 2e^{(t-2)}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t} \qquad y(1) = 0 = c_1 \qquad y'(1) = 0 = c_2$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$s^2Y(s) - sc_1 - c_2 - 3sY(s) + 3c_1 + 2Y(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$Y(s)\left(s^2 - 3s + 2\right) = \frac{1}{1+s} + c_1 s + c_2 - 3c_1$$

$$Y(s)\left(s^2 - 3s + 2\right) = \frac{1 + c_1(s-3)(s+1) + c_2(s+1)}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s-2)(s-1)}}_{F(s)} + c_1\underbrace{\frac{(s-3)}{(s-1)(s-2)}}_{G(s)} + \underbrace{\frac{c_2}{(s-1)(s-2)}}_{H(s)}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}$$

$$1 = A(s-2)(s-1) + B(s+1)(s-1) + C(s+1)(s-2) \qquad A = \frac{1}{6} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = \frac{1}{3}$$

$$F(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}$$

$$f(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

$$G(s) = \frac{s-3}{(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

$$s - 3 = A(s-1) + B(s-2) \qquad A = -1 \qquad B = 2$$

$$G(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-1}$$

$$g(t) = -e^{2t} + e^{t}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

$$1 = A(s-1) + B(s-2) \qquad A = 1 \qquad B = -1$$

$$H(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$h(t) = e^{2t} - e^{t}$$

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t}\right) + c_1\left(-e^{2t} + 2e^{t}\right) + c_2\left(e^{2t} - e^{t}\right)$$

$$y(t) = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + 2c_1 - c_2\right)}_{d_1}e^{t} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - c_1 + c_2\right)}_{d_2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$$

$$d_1 = -\frac{1}{2} + 2c_1 - c_2$$

$$d_2 = \frac{1}{3} - c_1 + c_2 \qquad \textit{como} \qquad c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad y(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$$

Utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema

$$x'' - y'' = t^2$$

$$x'' + y'' = 4t$$

dadas las condiciones iniciales $x(0)=8$, $x'(0)=0$, $y(0)=0$, $y'(0) = 0$.

RESOLUCIÓN

Transformando en Laplace cada una de las ecuaciones del sistema resulta

$$\mathscr{L}\{x''\} - \mathscr{L}\{y''\} = \mathscr{L}\{t^2\}$$
$$\mathscr{L}\{x''\} + \mathscr{L}\{y''\} = 4\mathscr{L}\{t\}$$

$$s^2 X(s) - s X(0) - X'(0) - \left[s^2 Y(s) - s Y(0) - Y'(0)\right] = \frac{2}{s^3}$$

$$s^2 X(s) - s X(0) - X'(0) + \left[s^2 Y(s) - s Y(0) - Y'(0)\right] = \frac{4}{s^2}$$

enseguida se aplican condiciones iniciales y se reducen términos

$$s^2 X(s) - 8s - s^2 Y(s) = \frac{2}{s^3} \text{ .... (A)}$$

$$s^2 X(s) - 8s - s^2 Y(s) = \frac{4}{s^2} \text{ ....(B)}$$

Sumando (A) y (B) se obtiene

$$2s^2 X(s) - 16s = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2}$$

de donde

$$2s^2 X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + 16s = \frac{2 + 4s + 16s^4}{2s^3}$$

$$X(s) = \frac{2 + 4s + 16s^4}{2s^5} = \frac{2\left(1 + 2s + 8s^4\right)}{2s^5}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{8}{s}$$

y al antitransformar

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{4!}t^4 + \frac{2}{3!}t^3 + 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{C})$$

Para obtener $Y(s)$ se puede emplear la ecuación (B), es decir

$$s^2 Y(s) = \frac{4}{s^2} + s^2 X(s) + 8s$$

$$s^2 Y(s) = \frac{4 - s^4 X(s) + 8s^3}{s^2}$$

de donde

$$Y(s) = \frac{4 - s^4 X(s) + 8s^3}{s^4}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^4} - X(s) + \frac{8}{s}$$

y al antitransformar

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$y(t) = 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - x(t)$$

pero $x(t)$ ya ha sido obtenida, entonces al sustituirla se tiene finalmente

$$y(t) = \frac{4}{3!}t^3 + 8 - \frac{1}{4!}t^4 - \frac{2}{3!}t^3 - 8$$

$$y(t) = \frac{2}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}t^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{D})$$

por lo que (C) y (D) constituyen la solución del sistema.

Ejercicio propuesto

Utilice la transformada de Laplace para obtener el valor de la función $x(t)$ tal que satisfaga al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' \quad + 8y &= 2 \\ x' - 2x + y' &= e^{4t} \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Solución.

$x(t) = e^{4t}\left(2t - 4t^2\right)$

TEMA 4 SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.

Recordando:

Sean

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

El producto escalar o producto punto:

$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

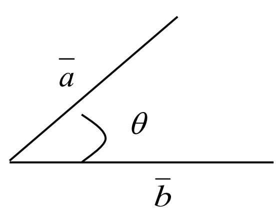
Si $\bar{b} = \bar{a}$

$\bar{a} \bullet \bar{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\sqrt{\bar{a} \bullet \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |\bar{a}|$

que es el tamaño, magnitud, módulo o norma.

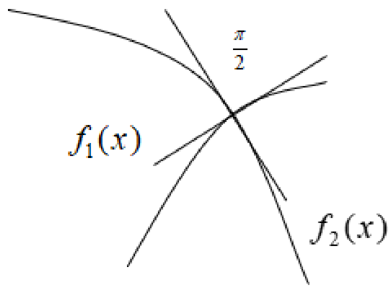
Interpretación Geométrica del producto escalar es



$\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

Si $\bar{a} \bullet \bar{b} = 0$ Puede deberse $|\bar{a}| = 0 \qquad |\bar{b}| = 0$

Si $|\bar{a}| \neq 0 \qquad |\bar{b}| \neq 0$ entonces se dice que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son vectores ortogonales.



Trayectorias ortogonales (es distinto a considerarlas como funciones ortogonales).

Producto interno.

Sean las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en $a \leq x \leq b$. El producto interno de estas funciones se define:

$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = (f_1, f_2)$$

Ahora bien, si $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = 0$ se dice que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones ortogonales.

Ejemplo:

Investigar si las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$.

$\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3 dx = \int_{-1}^{1} x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$ por lo que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones ortogonales.

Conjuntos Ortogonales.

Sea el conjunto de funciones
$\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, ...\}$ en $a \leq x \leq b$
Se dice que este conjunto de funciones es ortogonal si
$\int_a^b \phi_m(x) \cdot \phi_n(x) dx = 0 \qquad m \neq n \qquad m, n$ enteros no negativos

Ejemplo:
Compruebe que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, ...\}$ $\quad -\pi \le x \le \pi$ es ortogonal.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\sin n\pi - \sin\left(n(-\pi)\right)\right] = 0$$

n entero no negativo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx$$

Recordando las fórmulas de integración

$$\int \operatorname{sen} au \sin bu du = \frac{\operatorname{sen}\left[(a-b)u\right]}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}\left[(a+b)u\right]}{2(a+b)} + c$$

$$\int \operatorname{sen} au \cos bu du = -\frac{\cos\left[(a-b)u\right]}{2(a-b)} - \frac{\cos\left[(a+b)u\right]}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos au \cos bu du = \frac{\operatorname{sen}\left[(a-b)u\right]}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}\left[(a+b)u\right]}{2(a+b)} + c$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \frac{\operatorname{sen}\left[(m-n)x\right]}{2(m-n)} + \frac{\operatorname{sen}\left[(m+n)x\right]}{2(m+n)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

m, n enteros no negativos

Por lo que el conjunto propuesto es ortogonal.

Si $m = n$

$\int_a^b \phi_n^2 dx = \|\phi_n\|^2$ Norma cuadrada

$\|\phi_n\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}$ Norma

Si el conjunto de funciones

$$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x),...\} \quad \text{es ortogonal en } [-p,p]$$

Entonces si cada elemento se divide entre su norma correspondiente se obtendrá un conjunto ortonormal

$$\left\{\frac{\phi_0(x)}{\|\phi_0(x)\|}, \frac{\phi_1(x)}{\|\phi_1(x)\|}, \frac{\phi_2(x)}{\|\phi_2(x)\|},...\right\} \text{ en } [-p,p]$$

Ejemplos: Sea el conjunto ortogonal

$$\{1, \cos x, \cos 2x,...\} \text{ en } [-\pi,\pi]$$

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx} = \sqrt{x\Big|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi+\pi}$$

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx} \qquad n = 1, 2, ...\text{entero no negativo}$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos 2nx} = \sqrt{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4n}\sin 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$$

El conjunto ortonormal será:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},.....\right\}$$

Serie Trigonométrica de Fourier.

El conjunto ortogonal de funciones trigonométricas:

$$\left\{1, cos\,\frac{\pi}{p}x, cos\,\frac{2\pi}{p}x, cos\,\frac{3\pi}{p}x, ..., sen\,\frac{\pi}{p}x, sen\,\frac{2\pi}{p}x, sen\,\frac{3\pi}{p}x, ...\right\} \quad [-p, p] \quad \ldots (1)$$

tiene especial importancia en la solución de cierta clase de problemas de valores en la frontera, donde intervienen ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Suponga que $f(x)$ es una función definida en el intervalo $[-p, p]$ y que se puede desarrollar en una serie ortogonal formada por las funciones trigonométricas del conjunto ortogonal (1), Esto es:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right)\qquad\left[-p,p\right]\qquad\ldots(2)$$

Los coeficientes a_0, a_1, a_2,…b_1, b_2,… se pueden determinar.
Integrando ambos lados de la ecuación (2), desde $-p$ hasta p, se obtiene:

$$\int_{-p}^{p}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}cos\frac{n\pi}{p}xdx+b_n\int_{-p}^{p}sen\frac{n\pi}{p}x\,dx\right)\quad\ldots(3)$$

Como cada función $cos\frac{n\pi}{p}x,\ sen\frac{n\pi}{p}x,\ n\geq 1$, es ortogonal a (1) en el intervalo, el segundo miembro de la ecuación (3) se reduce a

$$\int_{-p}^{p}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}dx=pa_0$$

Despejando a_0 se obtiene:

$$\boxed{a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx}$$

Multiplicando la ecuación (2) por cos $\left(\frac{m\pi}{p}x\right)$ e integrando:

$$\int_{-p}^{p}f\left(x\right)\cos\frac{m\pi}{p}xdx=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}xdx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right)\ \ldots(4)$$

Por ortogonalidad, tenemos que:

$$\int_{-p}^{p}cos\frac{m\pi}{p}xdx=0\quad m>0$$

$$\int_{-p}^{p}cos\frac{m\pi}{p}xsen\frac{n\pi}{p}xdx=0$$

Ya que

$$\int_{-p}^{p}cos\frac{m\pi}{p}xsen\frac{n\pi}{p}xdx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ p. & m=n\end{cases}$$

La ecuación (4) se reduce a:

$$\int_{-p}^{p}f(x)cos\frac{n\pi}{p}xdx=a_np$$

De aquí:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) cos \frac{n\pi}{p} x dx}$$

De igual forma multiplicando la ecuación (2) por sen $\left(\frac{m\pi}{p}x\right)$ e integrando e interpretando los resultados

$$\int_{-p}^{p} f(x) \text{ sen}\frac{m\pi}{p} xdx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} \text{sen}\frac{m\pi}{p} xdx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-p}^{p} \text{sen}\frac{m\pi}{p} x \cos\frac{n\pi}{p} x + b_n \int_{-p}^{p} \text{sen}\frac{m\pi}{p} x \text{ sen}\frac{n\pi}{p} x\right) \quad ...(5)$$

$$\int_{-p}^{p} sen \frac{m\pi}{p} xdx = 0 \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} sen \frac{m\pi}{p} xsen \frac{n\pi}{p} xdx = 0$$

Ya que

$$\int_{-p}^{p} sen \frac{m\pi}{p} xsen \frac{n\pi}{p} xdx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p. & m = n \end{cases}$$

De aquí:

$$\int_{-p}^{p} f(x) sen \frac{n\pi}{p} xdx = b_n p$$

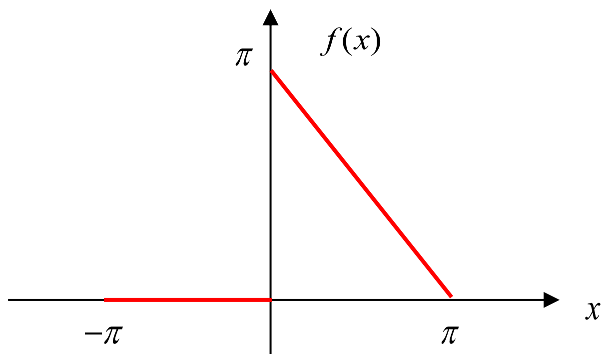
$$\boxed{b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) sen \frac{n\pi}{p} x dx}$$

Resumiendo:
La serie trigonométrica de Fourier de una función *f*(*x*) en el intervalo (-*p*, *p*)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p} x + b_n \text{sen}\frac{n\pi}{p} x\right)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \\
b_n &= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx
\end{aligned}
\right\}\ \text{Coeficientes de Euler.}
$$

Ejemplo: Obtener la serie trigonométrica de Fourier para la siguiente función



$$
f(x)\begin{cases} 0 & -\pi \le x \prec 0 \\ \pi - x & 0 \le x \prec \pi \end{cases}
$$

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,dx\right]
$$

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\right]
$$

$$
a_0 = \frac{\pi}{2}
$$

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi}{\pi}\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx\right]
$$

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx\right]
$$

$$
a_n = -\frac{1}{n\pi}\frac{\cos n\pi}{n}\Big|_0^{\pi}
$$

pero

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos n\pi = (-1)^n \\ &a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \end{aligned}}$$

de forma semejante:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{\pi}dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen} nx dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx\right)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(\cos n\pi - 1) - \left(-\frac{\pi}{n}\cos nx\right)\Big|\right]$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right)}$$