Probabilidad

$$\text{Experimentos} \begin{cases} \text{- Determinísticos} \\ \\ \text{- Aleatorios} \end{cases}$$

Un experimento **determinístico** es aquel en que se conoce su resultado antes de realizarlo.

Un experimento **aleatorio**, también llamado ensayo o acción es un proceso que tiene las siguientes propiedades:

1.- El proceso se efectúa de acuerdo a un conjunto bien definido de reglas.
2.- Es de naturaleza tal que se repite o puede concebirse la repetición del mismo.
3.- El resultado de cada ejecución depende de la "casualidad" y por lo tanto, no se puede predecir un resultado único.

Espacio de eventos o espacio muestral

Totalidad de resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo:
a) Lanzamiento de una moneda. $S_1=\{a,s\}$
b) Tipo de un dato. $S_2= \{1,2,3,4,5,6\}$
c) Lanzamiento de dos dados. $S_3= \{(1,1),(1,2),.........(6,6)\}$

Evento compuesto o evento o suceso

Es un subconjunto del espacio de eventos obtenido de acuerdo a una regla determinada.
Ejemplo:

$A= \{(x,y) /x =y\}$ $\rightarrow$ Por comprensión
$A= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ $\rightarrow$ Por extensión

Evento elemental o punto muestral

Es cada uno de los elementos que forman un evento. Como los eventos se pueden representar como conjuntos, se pueden definir operaciones entre eventos.

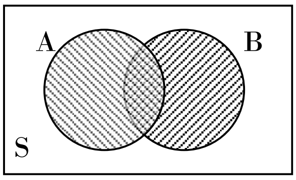
Operaciones entre eventos

Sea $A \subseteq S$ y $B \subseteq S$

-Unión

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$

Diagrama de Venn



*Corolario: $A \cup B = B \cup A$ Conmutatividad

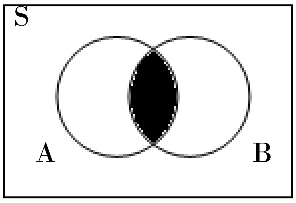
Tabla de verdad de la disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

-Intersección o conjunción

$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

Diagrama de Venn

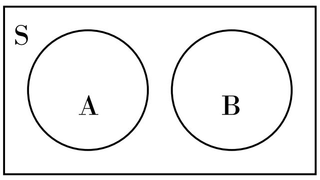


*Corolario: $A \cap B = B \cap A$ Conmutatividad

Tabla de verdad de la conjunción

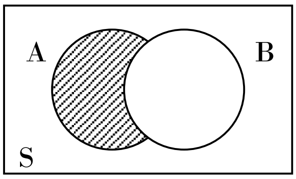
p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Si $A \cap B = \phi$ (evento imposible) entonces A y B son eventos mutuamente excluyentes:



-Diferencia

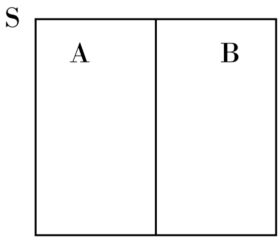
A –B = A\B = $\{ x \mid x \in A, x \notin B \}$



*Corolario 1: A-B $\neq$ B-A

*Corolario 2: $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

*Corolario 3: Si A y B son mutuamente excluyentes y $A \cup B$ =S, entonces A y B son colectivamente exhaustivos.



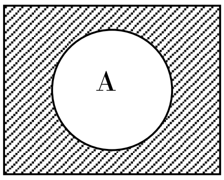
Ejemplo:

S= {1,2,3,4,5,6}
A= {1,3,5}
B= {2,4,6}

$A \cap B = \phi$
$A \cup B = S$ **A y B son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos**

-Complemento $A \subseteq S$

$$A^c = A' = \overline{A} = \{x / x \in S, x \notin A\}$$



*Corolario 1: A y A’ son eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. $A \cap A' = \phi$ (evento imposible) $A \cup A' = S$ (evento seguro)

*Corolario 2: Leyes de DeMorgan:

a) $A' \cup B' = (A \cap B)'$

b) $A' \cap B' = (A \cup B)'$

Cardinalidad de un evento

La cardinalidad de un evento está definida como el número de elementos no repetidos del evento. Ejemplo:

A={1,2,3,4,5,6} **n(A)=6=#(A)**

B={9,9,5,9,5,5,9 } **n(B)=2**

Probabilidad

a) Clásica o *a priori* o de Laplace

Sea $A \subseteq S$

$$P(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{tamaño de A}}{\text{tamaño de S}}$$

Los elementos del espacio de eventos tienen todos la misma posibilidad de ocurrencia.

b) Frecuentista Von Misses (a posteriori)

P(A)= $\lim_{n \to \infty} f_r(n)$

El espacio muestral o espacio de eventos es finito.

c) Enfoque Axiomático o de Kolmogorov

La definición axiomática de Kolmogorov toma en cuenta la definición de probabilidad clásica: P(A)= $\frac{n(A)}{n(S)}$; tal que cumple con los siguientes axiomas:

1. $0 \le P(A) \le 1$

2. P(S)=1 P(0)=0

3. Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces P($A \cup B$)=P(A)+P(B)

Generalizando:

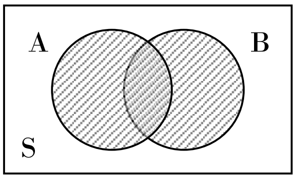
$$\mathbf{P(} A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_n \mathbf{)=P(A_1)+ P(A_2)+\ldots\ldots\ldots+ P(A_n)}$$

Si A_1,A_2,…….., A_n son eventos mutuamente excluyentes.

Teoremas derivados de los axiomas

1) Ley de adición de probabilidades

Para dos eventos A y B no mutuamente excluyentes:

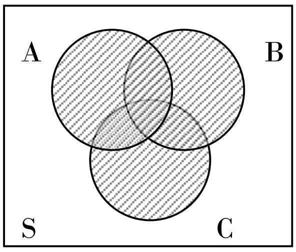


n($A \cup B$)=n(A)+n(B)-n($A \cap B$)

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$\mathbf{P(} A \cup B \mathbf{)=P(A)+P(B)-P(} A \cap B \mathbf{)}$$

Para tres eventos no mutuamente excluyentes



$$\mathbf{P(} A \cup B \cup C \mathbf{)=P(A)+P(B)+ P(C)-P(} A \cap B \mathbf{)-P(} A \cap C \mathbf{)-P(} B \cap C \mathbf{)+P(} A \cap B \cap C \mathbf{)}$$

2) Probabilidad del complemento

$$\mathbf{P(} A \cup A' \mathbf{)=P(A)+P(A')=1}$$

Ejercicio

En la siguiente tabla se enlista el historial de 940 obleas en un proceso de fabricación de semiconductores. Supóngase que se selecciona una de las obleas de la tabla al azar. Considere que A denota el evento de que la oblea contiene niveles altos de contaminación ¿Cuál es la probabilidad de A?

		Está en el centro de la máquina		Suma
		No	Si	
Contaminación	No	514	68	582
alta	Si	112	246	358
	Suma	626	314	940

$$\mathbf{P(A)=}\frac{358}{940}\mathbf{=0.3809}$$

b) Si B denota el evento de que la oblea se encuentra en el centro de la máquina herramienta de deposición electrónica, entonces ¿Cuál es la probabilidad de B?

$$\mathbf{P(B)=}\frac{314}{940}\mathbf{=0.3304}$$

c) Si P($A\cap B$) es la probabilidad que sea del centro de la máquina herramienta y contenga niveles altos de contaminación. ¿Cuál sería la probabilidad de $A\cap B$?

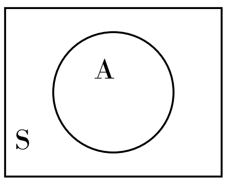
$$\mathbf{P(}A\cap B\mathbf{)=}\frac{246}{940}\mathbf{=0.2617}$$

d)Si $A\cup B$ es el evento de que una oblea es del centro de la máquina herramienta o contiene niveles altos de contaminación (o ambas), entonces:

$$\mathbf{P(}A\cup B\mathbf{)=}P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{358}{940}\mathbf{+}\frac{314}{940}\mathbf{-}\frac{246}{940}\mathbf{=0.4532}$$

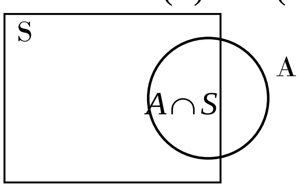
Probabilidad condicional

Para un solo conjunto:

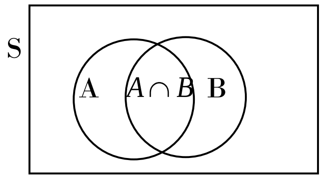


$$\mathbf{P(A|S)=}\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(A|S)}{n(S)}$$

Probabilidad de A dada la ocurrencia de S



Para dos conjuntos:



$A \subseteq S$

$B \subseteq S$

$$\textbf{P(B/A)=}\frac{\overbrace{P(A\cap B)}^{\textit{Probabilidad conjunta } (P(A,B))}}{\underbrace{P(A)}_{\textit{Probabilidad Marginal}}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{Probabilidad condicional}$$

Dependencia e independencia de eventos.

De la expresión de probabilidad condicional:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)\mathbf{=P(A_1)P(A_2/A_1)} \quad \rightarrow$$ **Ley de multiplicación de probabilidades para dos eventos dependientes**

Generalizando:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 ....A_n)\mathbf{=P(A_1)\ P(A_2/A_1)P(A_3/}\, A_1 \cap A_2\,\mathbf{)P(A_4/}\, A_1 \cap A_2 \cap A_3\,\mathbf{)}.......$$
$$.....\mathbf{P(A_n/}\, A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{n-1}\,\mathbf{)}$$

Ley general de multiplicación de probabilidades para eventos dependientes

Puede ocurrir que: $P(A_2/A_1)=P(A_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)\mathbf{=P(A_1)P(A_2)}$

Ley de multiplicación de probabilidades para eventos independientes

Generalizando:

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 ....A_n)\mathbf{ = P(A_1)P(A_2)....... P(A_n)=}\prod_{i=1}^{n} P(A)$$

Ley general de multiplicación de probabilidades para eventos dependientes

Ejercicios

1.- Se saca una carta de un paquete de 52 cartas.

a) Calcular la probabilidad de que la carta sea un As $\frac{4}{52}$ **=0.0769**

b) Calcular la probabilidad de que la carta sea Negra. $\frac{26}{52} = 0.5$

c) Calcular la probabilidad de que la carta sea Diamante. $\frac{13}{52} = 0.25$

d) Calcular la probabilidad de que se obtengan 2 cartas Rojas al extraerlas simultáneamente.

$$\textbf{P(2 Rojas)} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \mathbf{0.2451}$$

e) Calcular la probabilidad de obtener dos cartas Rojas al extraer cinco cartas.

$$\textbf{P(2R,3N)} = \frac{\binom{26}{2}\binom{26}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{845{,}000}{2{,}598{,}960} = \mathbf{0.3251}$$

2.- ¿Cuál es la probabilidad de que en una familia de 3 hijos haya 2 mujeres y un varón, si se considera igualmente probable que nazca un niño o una niña?

$PR_2^3 = 2^3 = 8$

n(S)=8

A={2 mujeres y un hombre}

n(A)=3

$$\textbf{P(A)} = \frac{3}{8} = \mathbf{0.375}$$

3.- En el lanzamiento de dos dados, obtener la probabilidad de que: a) caigan caras iguales, b) la suma de las caras que caen, sea mayor a 9.

S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

a) A= {caras iguales}= {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

$$\textbf{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \mathbf{0.1667}$$

b) B= {caras sumen más de 9}= {(4,6), (5,6), (6,6), (5,5), (6,4), (6,5)}

$$\textbf{P(B)=}\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=\mathbf{0.1667}$$

4.- Un experimento aleatorio puede producir uno de los resultados S={a,b,c,d} y con probabilidades de 0.1, 0.3, 0.5, 0.1 respectivamente. Determinar P(A), P(B), P(C), P(A'), P(B'), P(C'), P($A\cap B$), P($A\cup B$), P($A\cap C$)

A={a,b}
B={b,c,d}
C={a}

P(A)=0.1+0.3=**.4**
P(B)=0.9
P(C)=0.1
P(A')=0.6

P(B')=0.1
P(C')=0.9

P($A\cap B$ **)=0.3**
P($(A\cup B)$
=.4+.9-.3=**1**
P($A\cap C$ **)=0.1**

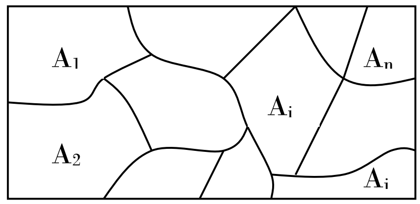
5.- Las piezas de aluminio forjado se clasifican con base en el acabado de la superficie (μ_{in}) y en las mediciones de longitud. Los resultados de 100 piezas se muestran a continuación:

		Longitud		
		Excelente	Buena	**Σ**
Acabado de superficie	Excelente	75	7	82
	Buena	10	8	18
	Σ	85	15	100

Si: A={Superficie excelente}
B={Longitud excelente}

a) P(A)=0.82
b) P(B)=0.85
c) P(A')=0.18
d) P($A\cap B$ **)=0.75**
e) **P(** $A\cup B$ **)**=0.82+0.85-0.75=0**.92**
f) **P(** $A'\cup B$ **)**=.18+.85-P($A'\cap$B)
=0.18+0.85-0.1=0**.93**

Partición



Si:

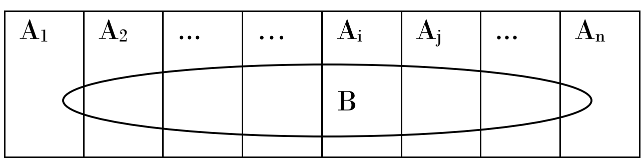
$$A_1 \cap A_2 \cap ....\cap A_n = \phi \quad \text{Eventos mutuamente excluyentes}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup ....\cup A_n = S \quad \text{Eventos colectivamente exhaustivos}$$

entonces $A_1, A_2, ...A_n$ forman una partición.

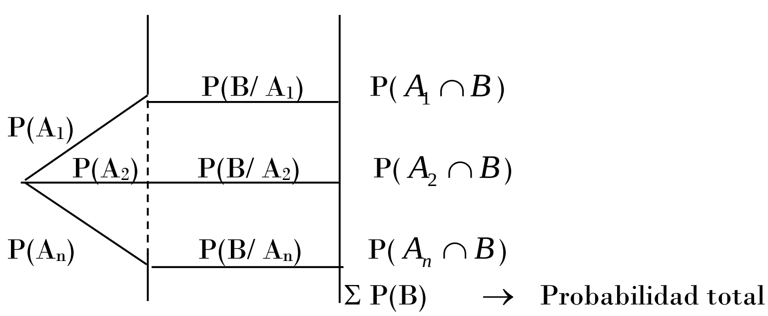
Probabilidad total

Sea la partición S:



Datos

$P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$
$P(B/A_1), P(B/A_2), ... ,P(B/A_n)$



Probabilidad apriori | Probabilidad condicional | Probabilidad conjunta

$$\mathbf{P(B)=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i) \qquad \textbf{Probabilidad total}$$

P(A$_j$/B)= $\dfrac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$ **Probabilidad condicional**

P(A$_j$/B)= $\dfrac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$ $\Rightarrow$ **Teorema de Bayes**

Ejercicio

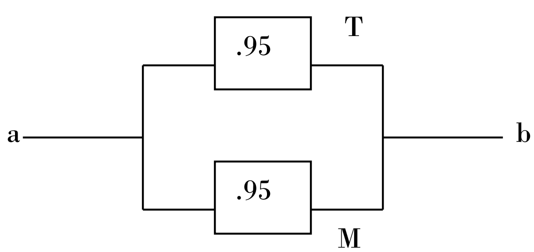
1.- La producción de tornillos de una fábrica está determinada por 3 máquinas (A, B, C); la máquina A produce el 50% del total, la máquina B el 20% y la C el 30%. El porcentaje de artículos defectuosos, producidos por A es el 30, los producidos por B el 50% y los de C el 20%.

a) La producción se almacena en un tambo. Si se extrae al azar un tornillo de ese tambo, ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
b) Dado que el tornillo extraído fue defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que hay sido producido por la máquina C?

Respuesta:

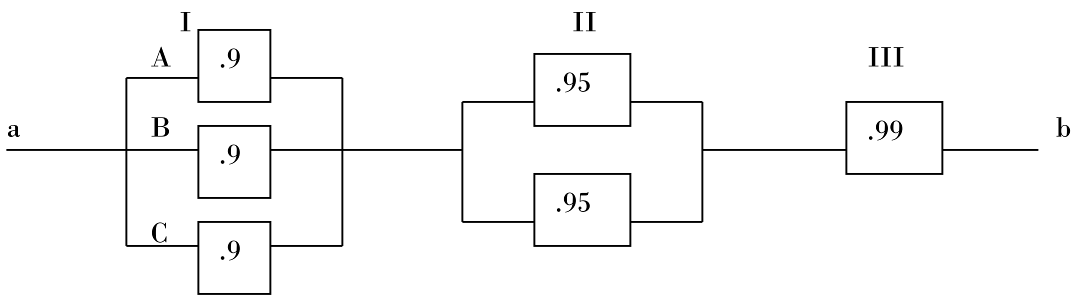
a) 0.31
b) 0.1935

2.- El circuito mostrado en la figura solo opera si hay una trayectoria de dispositivos funcionales de izquierda a derecha. La probabilidad de que cada dispositivo funcione se indica en la figura. Suponga que los dispositivos fallan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



P($T \cup M$ **)** =P(T) +P(M)-P($T \cap M$) = 0.95 + 0.95 - 0.95^2 = 1.9 - 0.9025 = 0**.9975**

3.- ¿Cuál es la probabilidad de que el circuito opere?



P(funcione circuito I)= P($A \cup B \cup C$)=P(A)+P(B)+P(C)-P($A \cap B$)-P($A \cap C$)-P($B \cap C$)+ P($A \cap B \cap C$)= .9+.9+.9-$(.9)^2$-$(.9)^2$-$(.9)^2$+$(.9)^3$=0**.999**

P(funcione circuito II)= P($D \cup E$)=P(D)+P(E)-P($D \cap E$)=.95+.95-$(.95)^2$=0**.9975**

P(funcione circuito III)= P(F)=0**.99**

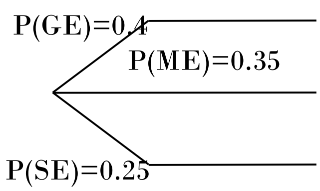
Resp 0.9865

4.- Los clientes acostumbran evaluar en forma preliminar el diseño de los productos. En el pasado, 45% de los productos de gran éxito recibieron críticas favorables, 60% de los productos con un éxito moderado recibieron críticas favorables y 10% de los productos sin mucho éxito recibieron críticas favorables. Además 40% son de gran éxito, 35% de éxito moderado, y 25% sin mucho éxito.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una crítica favorable?

b) Si un diseño nuevo obtiene una crítica favorable ¿Cuál es la probabilidad que el producto sea de gran éxito?

c) Si un diseño nuevo no obtiene una crítica favorable ¿cual es la probabilidad de que elproducto sea de gran éxito?



P(F/GE)=0.45

P(F/MD)=0.60

P(F/SE)=0.10

P($GE \cap F$)=(0.4)(0.45)=0.18

P($ME \cap F$)=(0.35)(0.6)=0.21

P($SE \cap F$)=(0.25)(0.1)=.025

a) **P(F)=.415**

b) **P(GE/F)=** $\dfrac{P(GE \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0.18}{0.415} =$ **.4337**

c) **P(GE/F')=** $\frac{P(GE \cap F')}{P(F')} = \frac{0.22}{0.585} = \mathbf{0.376}$