ECUACIONES DIFERENCIALES.

Tema I. Introducción y ecuaciones diferenciales de primer orden.

Una ecuación Diferencial es una expresión matemática que contiene derivadas o diferenciales de la función desconocida o variable independiente con respecto a la variable independiente.

Ejemplo:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

- Ordinarias
- En derivadas parciales

Ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left(3x^2 - 2y\right)dx + \left(5x - \frac{1}{xy}\right)dy = 0$$

$$y''' - 5y'' + 3xy' = x\cos 4x$$

Ejemplo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k$$

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = k$$

Definiciones.

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Grado de una ecuación diferencial.
Si la ecuación diferencial se puede escribir en forma polinomial en cuanto a las derivadas de la función desconocida o variable dependiente, el grado de la ecuación estará dado por el exponente de la derivada de mayor orden.

Ecuación diferencial lineal.
La forma general de una ecuación diferencial lineal tiene la siguiente estructura:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

y cumple con las siguientes características:

- Polinomial en las derivadas de la función desconocida o variable dependiente.
- Primer grado en las derivadas de la función desconocida y en la función desconocida.
- No hay productos entre la función desconocida y sus derivadas ni entre las derivadas.
- No hay funciones trascendentes de la función desconocida o sus derivadas.
- Si por lo menos uno de sus términos no cumple con las condiciones de linealidad, la ecuación diferencial es no lineal.

Ejemplos:

1. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$ se clasifica en: ordinaria, segundo orden, de grado 1 y no lineal.
2. $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ se clasifica en: derivadas parciales, segundo orden, de grado 1 es lineal.
3. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t)$ se clasifica en: ordinaria, de primer orden, de grado 1, es lineal.
4. $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + h\dfrac{dy}{dt} + ky = 0$ se clasifica en: ordinaria, de segundo orden, de grado 1, es lineal.
5. $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0$ se clasifica en: derivadas parciales, de segundo orden, de grado 1, es lineal.
6. $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = \sin x$ se clasifica en: ordinaria, de primer orden, de tercer grado y no lineal.
7. $y'' + 4y' - 5y = e^x \tan x$ se clasifica en: ordinaria, de segundo orden, de primer grado y es lineal.

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + y^3 = 1$ se clasifica en: ordinaria, de segundo orden, de primer grado, no lineal.
9. $e^{y''} - xy' + y = 0$ se clasifica en: ordinaria, de segundo orden, no se define el grado y no es lineal.
10. $(3y^2 + y)dx - \left(2xy - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$ se clasifica en: ordinaria, de primer orden, de primer grado y es no lineal.

Solución de una ecuación diferencial.

La solución de una ecuación diferencial es una función de la variable dependiente tal que al ser sustituida esta función y sus derivadas hasta de orden n en la ecuación diferencial, la transforman en una identidad, es decir la satisface.

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria es una función que contiene un número de constantes esenciales y arbitrarias igual al orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo.

This finds the *general solution* for the given ODE. A rule for the function that satisfies the equation is returned.

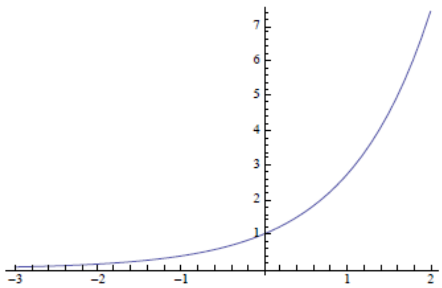
In[1]:= `DSolve[{y'[x] == y[x]}, y[x], x]`

Out[1]= $\{\{y[x] \to e^x C[1]\}\}$

This plots the solution. `ReplaceAll` (`/.`) is used in the `Plot` command to substitute the solution for $y[x]$.

In[4]:= `Plot[y[x] /. sol, {x, -3, 2}]`

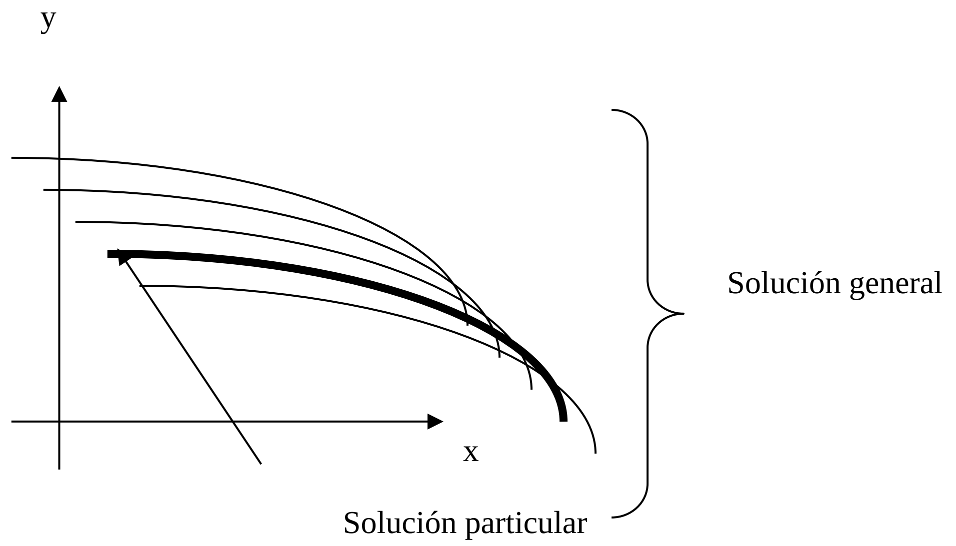
Out[4]=



A partir del anterior ejercicio obtenemos una clasificación de la solución de una ecuación diferencial las cuales son las siguientes:

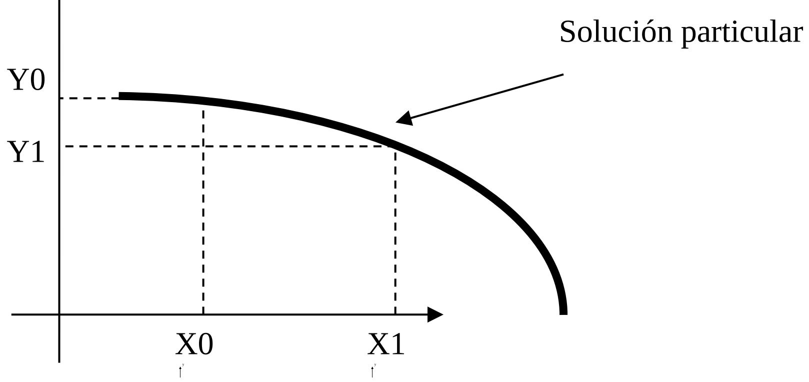
- General
- Particular

La solución general de una ecuación diferencial puede representarse en el plano cartesiano como una familia de curvas.



Una solución particular es aquella que proviene de una solución general como resultado de la asignación de valores numéricos a las constantes esenciales y arbitrarias (parámetros)

Determinación de los valores de las constantes esenciales arbitrarias.

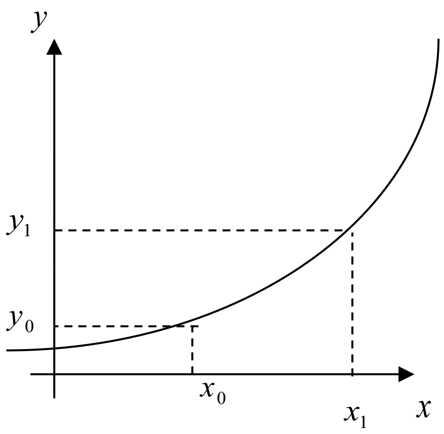


El número de condiciones iniciales es igual al orden de la ecuación diferencial y sus derivadas llegan hasta $y^{(n-1)}$

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y'_0$$
$$y''(x_0) = y''_0$$
....
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

NOTA: Las soluciones general o particular de una ecuación diferencial no contiene derivadas de la función desconocida o variable dependiente.
Una ecuación diferencial no contiene constantes esenciales y arbitrarias (parámetros)

Condiciones de frontera.



Solución explícita y = y(x)
Solución implícita u = u (x, y)

Obtención de una ecuación diferencial ordinaria, a partir de su solución general (Método de eliminación de constantes)

Ejemplo. Obtener la ecuación diferencial cuya solución general es:

$y = c_1 e^{-\frac{t}{60}} + 72 \ldots\ldots..(1)$

$y' = -\dfrac{c_1}{60} e^{-\frac{t}{60}}$

Despejando c_1

$c_1 = -60 y' e^{\frac{t}{60}}$ Sustituyendo en (1)

$y = \left(-60 y' e^{\frac{t}{60}}\right) e^{-\frac{t}{60}} + 72$

$y = -60 y' + 72$

$60 y' + y = 72 \ldots\ldots..$ Ecuación diferencial.

Así tenemos otra clasificación de las soluciones de ecuaciones diferenciales:

- Explícitas $y = f(x)$
- Implícitas $u = u(x, y)$

Ejemplo.

Si la solución general de una ecuación diferencial corresponde a la familia de rectas que pasan por el origen del sistema cartesiano, obtener la ecuación diferencial correspondiente.

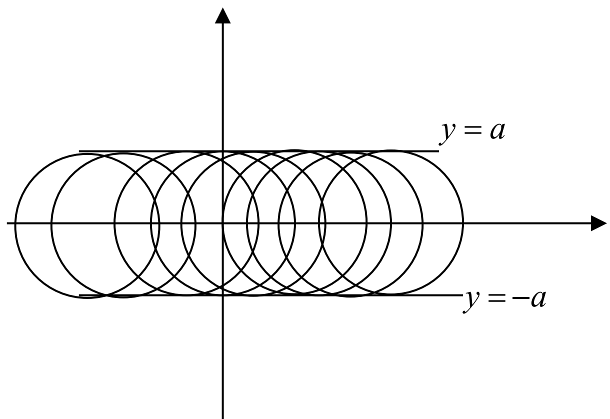
$y = c_1 x$

$y' = c_1$

$y = y'x$

$y' = \dfrac{y}{x}$

Ejemplo.
La solución general de una ecuación diferencial es representada por la familia de circunferencias con centro sobre el eje x y radio a.



$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-c_1)^2 + y^2 = a^2$.........(1)

Ecuación de la familia de circunferencias

$2(x-c_1) + 2yy' = 0$

$x - c_1 = -yy'$

$c_1 = x + yy'$

Si sustituimos en 1

$(x - x - yy')^2 + y^2 = a^2$

$y^2 (y')^2 + y^2 = a^2$

$y^2 \left[(y')^2 + 1\right] = a^2$

Ecuación diferencial.

Investiguemos si $y = a$ y $y = -a$ satisface la ecuación diferencial.

$y = a$	$y = -a^2$
$y' = 0$	$y' = 0$
Sustituyendo en la Ecuación diferencial	Sustituyendo en la Ecuación diferencial.

$a^2(0)^2 + a^2 = a^2$ $\qquad$ $(-a)^2(0)^2 + (-a)^2 = a^2$

Podemos concluir que si son soluciones.
A este tipo de soluciones se les denomina soluciones singulares.

Se llama solución singular a una función o regla de correspondencia que no se obtiene de la solución general.
En otras palabras, geométricamente es una curva que no pertenece a la familia de curvas que constituyen la solución general.

Ecuaciones Diferenciales de variables separables.

Sea la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Si $M(x,y) = f(x)$

$N(x,y) = g(y)$

$f(x)dx + g(y)dy = 0$

Solución:
$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$

Ejemplo.
$(1+x)dy - ydx = 0$

$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{1+x} = 0$

$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{1+x} = c_1$

$\ln y - \ln|1+x| = c_1; \quad \ln c = c_1$

$\ln y - \ln|1+x| = \ln c$

$\frac{y}{1+x} = c$

$y = c(1+x)$

Así llegamos a la solución general

Resuelve.
$y'(1+e^x) = e^{x-y}$

$(1+e^x)dy = (e^x e^{-y})dx$

$e^y dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int e^y dy = c_1$

$\ln|1+e^x| - e^y = c_1$

$e^y = \ln|1+e^x| + c \quad c = -c_1$

Resuelve:

$$y^2dx - xydy = x^2ydy$$
$$y^2dx - \left(x^2y + xy\right)dy = 0$$
$$y^2dx - y\left(x^2 + x\right)dy = 0$$
$$dx - \left(\frac{x^2 + x}{y}\right)dy = 0$$
$$\frac{dx}{x^2 + x} - \frac{dy}{y} = 0$$
$$\int \frac{dx}{x^2 + x} - \int \frac{dy}{y} = c_1$$
$$\ln x - \ln\left|x + 1\right| - \ln y = \ln c_2$$
$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \ln y = \ln c_2$$
$$\ln\left|\frac{x}{(x+1)y}\right| = \ln c_2$$
$$\frac{x}{y(x+1)} = c_2$$
$$y = \frac{cx}{(x+1)}$$

Resuelve $\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y}\right)dx + \left(x^2 \cos y\right)dy = 0$ Sujeta a $y(1) = \pi$

$$\left(\frac{1-x}{x^2}\right)dx + \left(y\cos y\right)dy = 0$$
$$\int\left(\frac{1-x}{x^2}\right)dx + \int\left(y\cos y\right)dy = c$$
$$-\frac{1}{x} - \ln x + y\sin y + \cos y = c$$

Valuando inicialmente

$$y(1) = \pi \Rightarrow (1, \pi)$$

$$-\frac{1}{1} - \ln(1) + \pi\sin\pi + \cos\pi = c$$
$$-1 - 1 = -2 = c$$

Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos.

Función homogénea de grado k, $k \in \Re$ $u(x,y)$ es una función homogénea de grado k, si al efectuar las sustituciones x por tx y y por ty resulta $u(tx,ty)=t^k u(x,y)$

Ejemplos:
$f\left(x^2+xy\right) \rightarrow f\left((tx)^2+txty\right)= f\left(t^2x^2+t^2xy\right)=t^2 f\left(x^2+xy\right)$ Es homogénea de grado 2.

$(\ln x-\ln y) \rightarrow \ln tx-\ln ty=\ln \frac{tx}{ty}$ Homogénea de grado 0

$e^{y/x} \rightarrow e^{ty/tx}=e^{y/x}$ Homogénea de grado 0

Definición: Se llama ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de coeficientes homogéneos a la expresión

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

En donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

- $\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$ C. H. De grado 2
- $xdx-\left(x+\sqrt{y^2-x^2}\right)dy$ C. H. De grado 1
- $xdy+ydx+(x+y)dx=0$ C. H de grado 1
- $\left(xy^2-x-y^2+1\right)dx=(xy+x-y-1)dy$ No es de C. H.

Resolución de una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos.

Sea la ecuación diferencial de coeficientes homogéneos

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

Su resolución puede lograrse empleando cualquiera de las siguientes sustituciones:

$$y=ux \qquad dy=udx+xdu \qquad ; \qquad u=\frac{y}{x}$$

o bien $x=uy \qquad dx=udy+ydu \quad ; \quad u=\frac{x}{y}$

La sustitución anterior nos conduce a una ecuación diferencial de variables separables.

Ejemplos.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

$(x^2+y^2)dx - xydy = 0$

Empleando la sustitución $y = ux \quad dy = udx + xdu$

$$(x^2+u^2x^2)dx - x^2u(udx + xdu) = 0$$
$$x^2dx + u^2x^2dx - x^2u^2dx - x^3udu = 0$$
$$x^2dx - x^3udu = 0$$
$$dx - xudu = 0$$
$$\frac{dx}{x} - udu = 0$$
$$\int \frac{dx}{x} - \int udu = c_1$$
$$\ln x - \frac{u^2}{2} = c_1$$
$$2\ln x - u^2 = c_2$$
$$\ln x^2 - u^2 = c_2$$

Sustituyendo $u = \frac{y}{x}$

$$\ln x^2 - \frac{y^2}{x^2} = c$$
$$x^2 \ln x^2 - y^2 = cx^2$$

Resuelve la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(xy+y^2+x^2\right)dx-x^2dy=0$$
$$y=ux$$
$$dy=udx+xdu$$
$$\left(x^2u+u^2+x^2\right)dx-x^2\left(udx+xdu\right)=0$$
$$\left(u+u^2+1\right)dx-\left(udx+xdu\right)=0$$
$$\left(1+u^2\right)dx-xdu=0$$
$$\frac{dx}{x}-\frac{du}{1+u^2}=0$$
$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{du}{1+u^2}=c_1$$
$$\ln x-\arctan\left(u\right)=c_1$$
$$\ln x-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=c_1$$

Resuelve la siguiente ecuación diferencial.

$$xdy+ydx+\left(x+y\right)dx=0$$
$$y=ux$$
$$dy=udx+xdu$$
$$sdy+ydx+xdx+ydx=0$$
$$xdy+2ydx+xdx=0$$
$$x\left(udx+xdu\right)+2uxdx+xdx=0$$
$$udx+xdu+2udx+dx=0$$
$$3udx+xdu+dx=0$$
$$\left(3u+1\right)dx+xdu=0$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{du}{3u+1}=0$$
$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{du}{3u+1}=c_1$$
$$\ln x+\frac{1}{3}\ln\left(3u+1\right)=\ln c_2;\text{.........}c_1=\ln c_2$$
$$\ln\left[x\left(3u+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]=\ln c_2$$
$$\left[x\left(3u+1\right)^{\frac{1}{3}}\right]=c_3;\text{..........}c_3=\ln c_2$$
$$\left[x\left(3\frac{y}{x}+1\right)^{1/3}\right]=c,\quad c=c_2$$

Ecuación Diferencial Exacta.

Sea la ecuación diferencial ordinaria y de primer orden:
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ……… (1)
Supongamos que su solución general tiene la forma
$u(x,y) = c$.......(2)
la diferencial total de esta función es:

$$d\left[u(x,y)\right] = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \text{.........(3)}$$

Hagamos:

$$\left.M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{y} \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \quad \text{……… (4)}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Por el teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Por la propiedad de transitividad

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

Condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial sea exacta.

Corolario:

Toda ecuación de variables separables es exacta.

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial y} = \frac{\partial g(y)}{\partial x} = 0$$

La reciproca no necesariamente se cumple.

Resolución de la ecuación diferencial exacta.

Métodos:

- Punto inicial.
- Función desconocida.
- Método abreviado.

Método de la función desconocida.

Sea la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{.............}(1)$$

Es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$u(x, y) = c$

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y) = c..........(2)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + h(y)\right] = N(x,y)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y) = N(x,y)$$

$$h'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Integrando respecto a y

$$h(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy........(3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se tendrá la solución general de la ecuación diferencial exacta.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(2xy - \sec^2 x\right)dx + \left(x^2 + 2y\right)dy = 0 \quad (1)$$

No es de variables separables y no es de coeficientes homogéneos.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ por lo tanto, es exacta.

$$u(x,y)=\int\left(2xy-\sec^2 x\right)dx+h(y)=c$$
$$x^2y-\tan x+h(y)=c\text{...........(1)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+h'(y)=x^2+2y$$
$$h'(y)=2y$$
$$h(y)=\int 2ydy=y^2\text{.........(2)}$$

Sustituyendo (2) en (1) tenemos

$x^2y-\tan x+y^2=c$ Solución general.

Método abreviado.
Sea $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ una ecuación diferencial exacta

$$\int M(x,y)dx+\int N(x,y)dy=c$$

Lo que conduce a la solución general, para expresarla se eliminan los términos repetidos.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$\left(2xy-\sec^2 x\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy=0$ exacta

$$\int\left(2xy-\sec^2 x\right)dx+\int\left(x^2+2y\right)dy=c$$
$$x^2y-\tan x+x^2y+y^2=c$$
$$x^2y-\tan x+y^2=c$$

Ecuación diferencial de primer orden no exacta. Factor integrante.

Sea la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0......(1)$ no exacta
ya que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.
Deberá existir una función $\mu(x,y)$ tal que al multiplicar la ecuación 1 la transforme en exacta.
$\mu(x,y)$ se le conoce como factor integrante o factor de integración.

Multiplicando 1 por $\mu(x,y)$ tenemos:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0......(2)$$

Se supone que la ecuación 2 es exacta por lo que debe cumplirse:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)].........(3)$$

La ecuación 3 es una ecuación en derivadas parciales cuya función desconocida es $\mu(x,y)$, cuya solución resulta muy complicada. Sin embargo, se puede proponer, la siguiente simplificación.
Por ejemplo, si $\mu(x,y)$ depende de una sola variable.

Caso I $\mu(x)$.

Considerando la expresión 3 tenemos.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)M(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)N(x,y)\right]..........(3)$$

$$\left[\mu(x)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) + M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\right] = \left[\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) + N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\right]..........(4)$$

$$\left[\mu(x)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\right] = \left[\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) + N(x,y)\frac{d}{dx}\mu(x)\right]..........(5)$$

$$\mu(x)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right]=N(x,y)\frac{d}{dx}\mu(x)$$

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right]=\frac{\frac{d}{dx}\mu(x)}{\mu(x)}=g(x)$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=g(x)..........(4)$$

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=g(x)dx$$

$$\int\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\int g(x)dx$$

$$\ln\mu(x)=\int g(x)dx$$

$$\mu(x)=e^{\int g(x)dx}...........(5)$$

Entonces podemos decir que 5 es el factor integrante.

De manera similar:
Caso II $F=\mu(y)$ debe llegarse a la expresión $\mu(y)=e^{\int g(y)dy}$

Ejemplo: Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$(x+y^2)dx-2xydy=0$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y$ $\quad\quad$ $\frac{\partial N}{\partial x}=-2y$ Entonces es no exacta.

Investiguemos el factor integrante $\mu(x)$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{-2xy}(2y+2y)=-\frac{2}{x}=g(x)$$

$$\mu(x)=e^{\int g(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$$

$$\mu(x)=\frac{1}{x^2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(x)$, tenemos:

$$\frac{1}{x^2}\left(x+y^2\right)dx-\frac{2}{x^2}(xy)dy=0$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-\left(\frac{2y}{x}\right)dy=0$$

Ahora verifiquemos si la nueva ecuación diferencial es exacta.

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$ Entonces tenemos que es exacta.

Resolviendo por el método abreviado tenemos:

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\int\frac{y}{x}dy=c$$

$$\ln x-\frac{y^2}{x}-\frac{y^2}{x}=c$$

$$\ln x-\frac{y^2}{x}=c$$

que es la solución general de la ecuación diferencial.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(x+3x^3\sin y\right)dx+\left(x^4\cos y\right)dy=0$$

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^3\cos y$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x}=4x^3\cos y$ Podemos ver que no es exacta entonces:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{3x^3\cos y}{x^4\cos y}-\frac{4x^3\cos y}{x^4\cos y}=-\frac{1}{x}=g(x)$$

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=x^{-1}$$

Multiplicando el factor integrante por la ecuación diferencial tenemos:

$\left(1+3x^2\sin y\right)dy+\left(x^3\cos y\right)dy=0$ Ahora inspeccionemos si la nueva ecuación diferencial es exacta:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2\cos y$ $\quad \frac{\partial N}{\partial y}=3x^2\cos y$ Como podemos ver la ecuación es exacta.

Empleando el método abreviado tenemos.

$$\int\left(1+3x^2\sin y\right)dy+\int\left(x^3\cos y\right)dy=c$$

$x + x^3 \sin y + x^3 \sin y = c$

$x + x^3 \sin y = c$

Que es la solución general de la ecuación diferencial.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$\left(xy^2 - x - y^2 + 1\right)dx - \left(xy + x - y\right)dy = 0$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 2y \qquad \dfrac{\partial N}{\partial x} = -y - 1$ vemos que no es exacta.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\left(2xy - 2y\right) - \left(-y - 1\right)}{-\left(xy + x - y\right)} = \frac{2xy - y + 1}{-\left(xy + x - y\right)} \neq g(x)$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-\left(2xy - 2y\right) + \left(-y - 1\right)}{xy^2 - x - y^2} = \frac{-2y - y - 1}{xy^2 - x - y^2} \neq g(y)$$

El factor integrante depende de dos variables, por lo que se sugiere utilizar el método de inspección (tablas).

TEMA II. Ecuaciones diferenciales Lineales.

Sea la ecuación diferencial de orden n.

$$b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + \ldots.. + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = R(x) \ldots\ldots b_0(x) \neq 0$$

Normalizando la ecuación anterior, es decir dividiendo $b_0(x)$ tenemos:

$$y^n + \frac{b_1(x)}{b_0(x)}x^{n-1} + \ldots. + \frac{b_{n-1}(x)}{b_0(x)}y' + \frac{b_n(x)}{b_0(x)}y = \frac{R(x)}{b_0(x)}$$

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots.. + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x) \ldots\ldots.(A)$$

De A, si la ecuación fuera de primer orden tendría la forma:

$$a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

normalizando.

$$y' + \frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)}y = \frac{Q(x)}{a_{n-1}(x)}$$

$$y' + p(x)y = q(x) \ldots\ldots\ldots 1$$

Forma general de la ecuación diferencial lineal de primer orden, completa o no homogénea.

Si $q(x) = 0$

$y' + p(x) = 0$ Ecuación diferencial lineal de primer orden incompleta u homogénea.

La ecuación diferencial lineal de primer orden. (Método F. I.)

Solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\text{.........}1$$

multiplicando por dx tenemos:

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx$$

$$dy + p(x)dx = q(x) + 0dy\text{.........}2$$

$\frac{\partial M_1}{\partial y} = p(x)$ $\qquad$ $\frac{\partial N_1}{\partial x} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial q(x)}{\partial y} = \frac{\partial 0}{\partial x} = 0$

Teorema: Si un factor integrante multiplica a una diferencial exacta ésta continúa siendo exacta.

Obtención de un factor integrante.

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{1}\left(p(x) - 0\right) = p(x) = g(x)$$

$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ Factor Integrante.

Multiplicando (2) por el factor integrante tenemos:

$$e^{\int p(x)dx}\left[dy + p(x)ydx = q(x)dx\right]$$

$$e^{\int p(x)dx}dy + e^{\int p(x)dx}p(x)ydx = e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

$$d\left[e^{\int p(x)}y\right] = e^{\int p(x)dx}$$

Integrando:

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + c_1$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + c_1\right]$$

$$\underbrace{y = ce^{-\int p(x)dx}}_{y_c = y_H} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx}_{y_p}$$

Donde $y_c = y_H$ es la solución complementaria o solución de la ecuación homogénea asociada.
y_p es una solución "particular" debida a la consideración del término independiente $q(x)$.

$$y = y_c + y_p$$

Método de variación de parámetros (Lagrange)

Sea la ecuación diferencial $y' + p(x)y = q(x)$.......(1)

Pasos:

a) $y_c = e^{-\int p(x)dx}$........(2)
b) Hagamos $c = u(x)$ (variar el parámetro)
c) $y_s = u(x)e^{-\int p(x)dx}$ (solución supuesta) …… (3)
d) $y_s' = u(x)e^{-\int p(x)dx} \quad \left[-p(x) + u'(x)e^{-\int p(x)dx}\right]$......(4)
e) Sustituimos 3 y 4 en 1.

$$-p(x)u(x)e^{-\int p(x)dx} + u'(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)u(x)e^{-\int p(x)}dx = q(x)$$
$$u'(x)e^{-\int p(x)dx}dx = q(x)$$
$$u'(x) = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

Integrando respecto a x tenemos:

$$u(x) = \int e^{\int p(x)dx}dx + c.........(5)$$

Sustituyendo 5 en 3.

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)}q(x)dx + c\right]$$
$$y = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

Solución general.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$$

Normalizando

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x$$

$$dy-\frac{4}{x}ydx=x^5e^xdx$$

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

$$p(x)=-\frac{4}{x}$$

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=x^{-4}$$

Multiplicando el factor integrante a la ecuación diferencial.

$$x^{-4}dy-4x^{-5}ydx=xe^xdx$$

$$d\left(x^{-4}y\right)=xe^xdx$$

Integrando:

$$x^{-4}y=\int xe^xdx+c_1$$

$$y=x^4\left[xe^x-e^x+c\right]$$

$$y=cx^4+x^5e^x-x^4e^x$$

Resuelva la siguiente ecuación diferencial empleando el método de variación de parámetros.

$$x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x \quad (1)$$

Normalizando tenemos:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x.....1 \qquad p(x)=-\frac{4}{x} \qquad q(x)=x^5e^x$$

$$y_c=ce^{-\int p(x)dx}=ce^{\int \frac{4}{x}dx}=ce^{4\ln x}=cx^4\ldots\ldots (2)$$

Hagamos $c=M(x)$

$$y_s=u(x)x^4........(3)$$

$$y_s'=4u(x)x^3+u'(x)x^4.....(4)$$

Sustituyendo 3 y 4 en 1

$$4u(x)x^3 + u'(x)x^4 - \frac{4}{x}u(x)x^4 = x^5e^x$$
$$u'(x)x^4 = x^5e^x$$
$$u'(x) = xe^x$$
$$u(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x ....(5)$$
Sustituyendo 5 en 3

$$y_s \to y_p = \left(xe^x - e^x\right)x^4$$
$$y_p = \left(x^5e^x - x^4e^x\right).........(6)$$
$$y = y_c + y_p$$
Sumando 2 y 6
$y = cx^4 + x^5e^x - x^4e^x$ Solución general.

Resuelva la siguiente ecuación diferencial empleando el método del factor integrante y de variación de parámetros.

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

Empleando el factor integrante.

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x...........1$$
$$\frac{dy}{dx} + (\tan x)y = \cos^2 x$$
$$dy + (\tan x)ydx = \cos^2 xdx$$
$$p(x) = \tan x$$
El factor integrante es:
$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln \cos x} = \sec x$$
Multiplicando el factor integrante en 1 tenemos:
$$\sec xdy + y\sec x\tan xdx = \sec x\cos^2 xdx$$
$$d[(\sec x)y] = \cos x$$
Integrando $\int d[(\sec x)y] = \int \cos x + c$
$$y\sec x = \sin x + c$$
$y = \sin x\cos x + c\cos x$ Solución general.

Empleando variación de parámetros.

$$y' + \tan x(y) = \cos^2 x$$
$$y = ce^{-\int p(x)dx} = y_c = ce^{-\int \tan x dx}$$
$$y_c = c\cos x$$

hagamos $c = u(x)$

$y_s = u(x)\cos x$

$y_s' = -u(x)\sin x + u'(x)\cos x$

$-u(x)\sin x + u'(x)\cos x + (\tan x)(u(x)\cos x) = \cos^2 x$

$u'(x)\cos x = \cos^2 x$

$u'(x) = \cos x$

$u(x) = \sin x$

$y_s \to y_p = \sin x \cos x$

$y = y_c + y_p$

$y = c\cos x + \sin x \cos x$

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Este tipo de ecuaciones constituyen modelos matemáticos que pueden aplicarse a problemas de crecimiento y decaimiento poblacional, la ley del enfriamiento de Newton, mezclas, circuitos eléctricos y algunos problemas de tipo geométrico.

Crecimiento y decaimiento.

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad x(x_0) = x_0$$

Donde k es una constante de proporcionalidad, esta ecuación se emplea como modelo en los fenómenos en los que interviene crecimiento o decaimiento o desintegración, por ejemplo, problemas biológicos, de crecimientos o decaimiento de poblaciones, de reacciones químicas etc.

1. La ecuación diferencial es $\dfrac{dA}{dt} = k(M - A)$
2. La ecuación diferencial es $\dfrac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2 A$
3. La ecuación diferencial es $x'(t) = r - kx(t)$ donde $k > 0$

Ejemplo.
Crecimiento bacteriano.
Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando $t = 1h$ la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}$ de P_0. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias creciente $P(t)$ en el momento t calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$
$$\frac{dP}{P} = kdt$$
$$\ln P = kt + c_1$$
$$P = e^{kt+c_1} = e^{kt}e^{c_1} \qquad c = e^{c_1}$$

$P = ce^{kt}$ Solución general.

Cuando $t = 0$ $\qquad P(0) = P_0$

Cuando $t = 1h$ $\qquad P(1) = \frac{3}{2}P_0$

Sustituyendo la condición inicial.
$$P_0 = ce^{0k}$$
$$c = P_0$$
$$P = P_0e^{kt}$$
Sustituyendo la condición final.
$$\frac{3}{2}P_0 = P_0e^{k(1)}$$
$$\frac{3}{2} = e^{k(1)}$$
$$\ln\frac{3}{2} = k(1)$$
$$\ln\frac{3}{2} = k$$
$$k = 0.405465$$
$$P = P_0e^{0.405465t}$$

Calculando el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

$$3P_0 = P_0e^{0.405465t}$$
$$\ln 3 = 0.405465\ t$$
$$t = 2.71h$$

Ley del enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

donde:

k = constante de proporcionalidad
T = temperatura
Tm = temperatura del medio
t = tiempo

Forma de resolución:

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\ln(T - T_m) = kt + C$$

$$T - T_m = e^{kt+C}$$

$$C_1 = e^c$$

$$T = C_1 e^{kt} + Tm$$ $\Rightarrow$ **Ley del enfriamiento**

Ejemplo:

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300 °F. Después de 3 minutos es de 200 °F. ¿En cuánto tiempo se enfriará hasta alcanzar la temperatura ambiente de 70 °F?

$$T = C_1 e^{kt} + Tm$$

En $t = 0$, $T = 300$

$$300 = C_1 + 70$$

$$C_1 = 230$$

Sustituyendo C_1 en la ecuación

$$T = 230e^{kt} + 70$$

Cuando $t = 3$, $T = 200$

$$200 = 230e^{3k} + 70$$

$$\frac{130}{230} = e^{3k}$$

$$\ln(0.5652) = 3k$$

k = -0.190181

Sustituyendo k en la Ecuación

$T = 230e^{-0.190181t} + 70$

Si T = 70 (temperatura del medio)

$70 = 230e^{-.190181t} + 70$

$\ln 0 = -.190181\, t$

No existe

Aproximando, $T = 230e^{-.190181t} + 70$, se obtiene que el pastel se acercará a Tm pasada la media hora (t = 32.3 min)

Mezclas

$\frac{dA}{dt} =$ (rapidez con que entra la sal) – (rapidez con que sale la sal) = $R_i - R_0$

Ejemplo:

Un tanque contiene inicialmente 300 galones de una solución de salmuera. Al tanque entra y sale sal porque se le bombea salmuera a razón de 3 gal/min, y se mezcla con la solución original, en tanto que sale del tanque a razón de 3 gal/min. La concentración de la solución entrante es de 2 lb/gal. Por consiguiente:

$$R_i = (2\frac{lb}{gal})(3\frac{gal}{\min}) = 6\frac{lb}{\min}$$

mientras que salía con una rapidez de:

$$R_o = (3\frac{gal}{\min})(\frac{A}{300}\frac{lb}{gal}) = \frac{A}{100}\frac{lb}{\min}$$

A partir de estos datos y de la Ecuación Diferencial se obtiene la ecuación:

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$$

Si había 50 lb de sal disueltas en los 300 galones iniciales, ¿Cuánta sal habrá en el tanque pasado mucho tiempo?

$A(0) = 50$ lb

$$\frac{dA}{dt} + \frac{A}{100} = 6$$

Resolviendo la ecuación:

$$p(t)=\frac{1}{100}$$

$$A_c=Ce^{-\frac{1}{100}\int dt}=Ce^{-\frac{t}{100}}$$

$$C=u(t)$$

$$A_s=u(t)e^{-\frac{t}{100}}$$

$$A'_s=-\frac{1}{100}u(t)e^{-\frac{t}{100}}+u'(t)e^{-\frac{t}{100}}$$

Sustituyendo en la Ecuación Diferencial:

$$-\frac{1}{100}u(t)e^{-\frac{t}{100}}+u'(t)e^{-\frac{t}{100}}+\frac{u(t)e^{-\frac{t}{100}}}{100}=6$$

$$u'(t)e^{-\frac{t}{100}}=6$$

$$u'(t)=6e^{\frac{t}{100}}$$

$$u(t)=600e^{\frac{t}{100}}$$

Sustituyendo $u(t)$ en A_s

$$A_p=600e^{\frac{t}{100}}(e^{-\frac{t}{100}})$$

$$A_p=600$$

$$A=Ce^{-\frac{t}{100}}+600 \quad \Rightarrow$$ **Solución General**

Valuando inicialmente t = 0, A = 50

$$50=C+600$$

$$C=-550$$

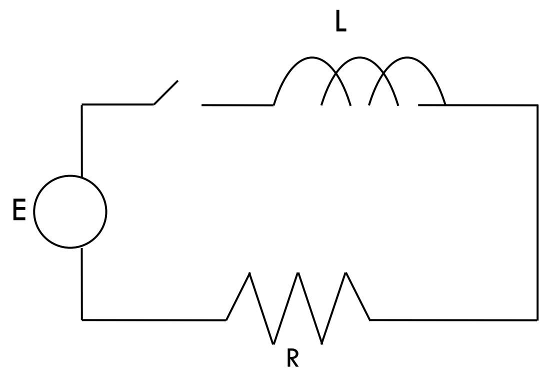
Sustituyendo en la Solución General

$$A=-550e^{-\frac{t}{100}}+600$$

Después de mucho tiempo (t $\rightarrow \infty$)

$$A=600$$

Circuitos eléctricos



La ecuación diferencial que se utiliza para la resolución de este tipo de circuitos es:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)$$

Ejemplo:

Un acumulador de 12 V se conecta a un circuito en serie, con una inductancia de ½ Henry y una resistencia de 10 Ω. Determina la corriente **i** si la corriente inicial es 0.

Sustituyendo valores:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt}+10i=12$$

$$\frac{di}{dt}+20i=24$$

Resolviendo la Ecuación Diferencial

$$p(t)=20$$

$$i_c=Ce^{-20\int dt}=Ce^{-20t}$$

$$i_s=u(t)e^{-20t}$$

$$i'_s=-20u(t)e^{-20t}+u'(t)e^{-20t}$$

Sustituyendo en la Ecuación Diferencial

$$-20u(t)e^{-20t}+u'(t)e^{-20t}+20u(t)e^{-20t}=24$$

$$u'(t)e^{-20t}=24$$

$$u'(t)=24e^{20t}$$

$$u(t)=\frac{6}{5}e^{20t}$$

Sustituyendo $u(t)$ en i_s

$$i_s \to i_p = \frac{6}{5}e^{20t}e^{-20t} = \frac{6}{5}$$

$$i = Ce^{-20t} + \frac{6}{5}$$

Si t = 0, i = 0

$$0 = C + \frac{6}{5}$$

$$C = -\frac{6}{5}$$

Sustituyendo C en la solución general

$$i = -\frac{6}{5}e^{-20t} + \frac{6}{5}$$

$$i = \frac{6}{5}(1 - e^{-20t})$$

Para que la intensidad de corriente sea de 1 A:

$$1 = \frac{6}{5}(1 - e^{-20t})$$

$$\frac{5}{6} = 1 - e^{-20t}$$

$$e^{-20t} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$-20t = \ln(\frac{1}{6})$$

$$t = 0.08958\ s$$