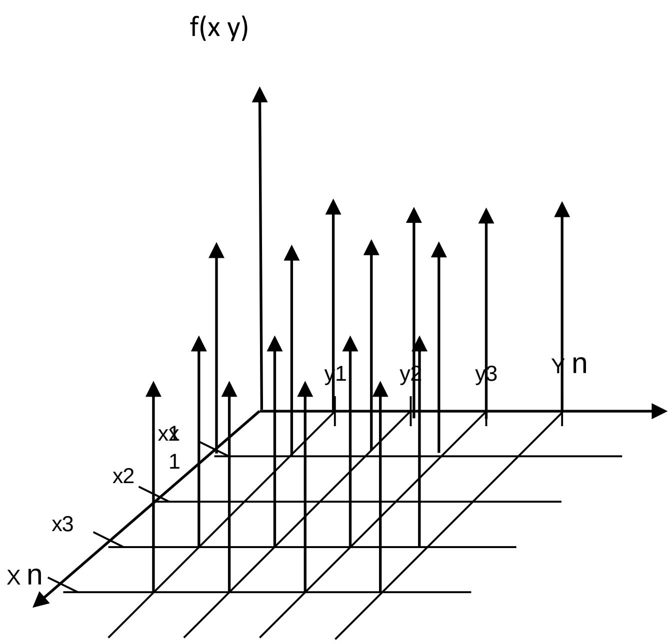
Tema 5. Variables Aleatorias Conjuntas.

Objetivo: El alumno conocerá el concepto de variables aleatorias conjuntas y podrá analizar el comportamiento probabilista, conjunta e individualmente, de las variables a través de su distribución, e identificara relaciones de dependencia entre dichas variables.

Variable aleatoria discreta conjunta (bivariantes).

Sean X y Y variables aleatorias discretas conjuntas. Para que X y Y definan una función masa de probabilidad conjunta, debe cumplirse que

1) $0 \leq f(x, y) \leq 1$
2) $\sum \sum f(x, y) = 1$



X / y	x_1	x_2	…	x_m	h(y)
y_1	$P(x_1,y_1)$	$P(x_2,y_1)$	…	$P(x_m,y1)$	$h(y_1)$
y_2	$P(x_1,y_2)$	$P(x_2,y_2)$	…	$P(x_m,y2)$	$h(y_2)$
…	…	…	…	…	…
Y_n	$P(x_1,y_n)$	$P(x_2,y_n)$	…	$P(x_m,y_n)$	$h(y_n)$
Y(x)	$g(x_1)$	$g(x_2)$	…	$g(x_m)$	1

Ejemplo:

De una caja que contiene 3 lápices azules, 2 rojos y 3 verdes. Se toman 2 lápices al azar. Si X es el número de lápices azules y Y el número de lápices rojos seleccionado, a) encuentre la función de la probabilidad conjunta f(x, y) y b) la probabilidad de (x, y); $P[(x,y)] \;\varepsilon\; R]$; donde R es la región $R\{(x,y)/x+y \leq 1\}$

x=número de lápices azules = 3

y=número de lápices rojos = 2

Lápices verdes = 3

Se toman 2 lápices

X= {0, 1,2}

Y= {0, 1,2}

a)

X / y	0	1	2	h(y)
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
g(x)	10/28	15/28	3/28	1

$$P(0,0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

$$P(1,0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{9}{28}$$

$$P(2,0)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

$$P(0,1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}$$

$$P(1,1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{6}{28}$$

$p(2,1)=0$ Ya que se sacan 3 y solo se pueden sacar 2

$$P(0,2)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}}=\frac{1}{28}$$

$$P(1,2)=0$$
$$P(2,2)=0$$

b) $P(x+y\leq 1)=P(0,0)+p(0,1)+P(1,0)=\frac{3}{28}+\frac{6}{28}+\frac{9}{28}=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$

Variables aleatorias conjuntas continuas.

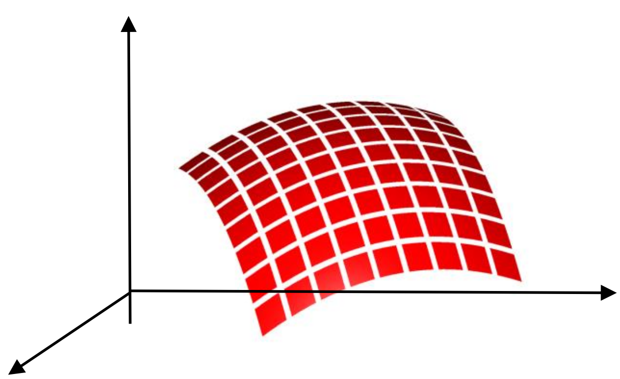
Sean X y Y dos variables aleatorias continuas conjuntas. Para que X y Y definan una función de densidad conjunta debe cumplirse:

1) f(x,y)>0

2) $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy=1$

$$a\leq x\leq b$$
$$c\leq y\leq d$$

Gráfica



Ejemplo:

Considérese la función de densidad conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4} & 0 < x < 2 \text{ ; } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

a) Verifique que f(x, y) define una función densidad de probabilidad.
b) Encuentre la $P[(x,y)\varepsilon A]$ donde A es la región $\{(x,y)/0 \le x \le 1, \frac{1}{4} \le y \le \frac{1}{2}\}$

a)

$$\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^2 (x+3xy^2)dxdy = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x^2y^2)\right]_0^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (2+6y^2)dy = \frac{1}{4}(2y+2y^3)\Big]_0^1 =$$

$$\frac{1}{4}(4)=1$$

b)

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 x(1+3y^2)dx\,dy = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x^2y^2\right)dy\Bigg]_0^1 = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}+\frac{y^3}{2}\right)\Bigg]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{128}\right) = \frac{23}{512}$$

DISTRIBUCIONES CONDICIONALES

Recordando:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$f(X=x\,|\,Y=y)=\frac{f(x,y)}{f(Y=y)}=\frac{f(x,y)}{h(y)}$$

$$f(Y=y\,|\,X=x)=\frac{f(x,y)}{f(X=x)}=\frac{f(x,y)}{g(x)}$$

$$P(a<x<b/Y=y)=\int_a^b f(x/y)dx$$

$$P(c<y<d/X=x)=\int_c^d f(y/x)dy$$

Ejemplo: Para la siguiente distribución de probabilidad conjunta, dada en la tabla siguiente, obtener:

a) $f(x/1)=f(X=x/y=1)$

b) $f(x=0/y=1)=\dfrac{f(0,1)}{h(1)}$

Completando la tabla de distribución conjunta

X / y	0	1	2	h(y)
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
g(x)	10/28	15/28	3/28	1

$$h(1)=\sum_{x=0}^{2} f(x,1)=\frac{6}{28}+\frac{6}{28}+0=\frac{3}{7}$$

$$f(x/1)=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{7}{3}f(x,1)$$ x=0, 1,2

$$f(0/1)=\frac{7}{3}f(0,1)=(\frac{7}{3})(\frac{6}{28})=\frac{1}{2}$$

$$f(1/1)=\frac{7}{3}f(1,1)=(\frac{7}{3})(\frac{6}{28})=\frac{1}{2}$$

$$f(2/1)=\frac{7}{3}f(2,1)=(\frac{7}{3})(0)=0$$

Entonces:

a)

Distribución condicional

X	0	1	2
f(x/1)	1/2	1/2	0

b)

$$P(x=0/y=1)=\frac{1}{2}$$

DISTRIBUCIONES MARGINALES

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \sum_{\forall y} f(x,y) \\ h(y) &= \sum_{\forall x} f(x,y) \end{aligned}\right\} \text{Distribuciones marginales caso discreto}$$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \int_c^d f(x,y)dy \\ h(y) &= \int_a^b f(x,y)dx \end{aligned}\right\} \text{Distribuciones marginales caso continuo}$$

Ejemplo:

Sea la función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4} & 0<x<2; 0<y<1 \\ 0 & \end{cases}$$

Obtenga:

a) Las distribuciones marginales para g(x) y h(y).
b) La distribución condicional f(x/y)
c) La probabilidad $P\left(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\middle| y=\frac{1}{3}\right)$
d) Investigar si las variables aleatorias X y Y son estadísticamente independientes.

a) $g(x)=\int_0^1 \frac{x+3xy^2}{4}dy=\frac{1}{4}\int_0^1 xdy+\frac{3}{4}\int_0^1 xy^2dy=\frac{x}{4}(y)+\frac{3x}{4}\left(\frac{y^3}{3}\right)=\frac{xy}{4}+\frac{xy^3}{4}\Big]_0^1$

$=\frac{x}{4}+\frac{x}{4}=\frac{x}{2};0<x<2$

$h(y)=\int_0^2 \frac{x+3xy^2}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^2 xdx+\frac{3y^2}{4}\int_0^2 xdx=\frac{x^2}{8}+\frac{3y^2x^2}{8}\Big]_0^2=\frac{1}{2}+\frac{3y^2}{2}=\frac{1+3y^2}{2}$; 0<y<1

b) $f(x/y)=\frac{f(x,y)}{b(y)}=\frac{x(1+3y^2)}{4\left(\frac{1+3y^2}{2}\right)}=\frac{x}{2}$

c) $P(a<x<b/Y=y)=\int_a^b f(x/y)dx$

$P(\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}/y=\frac{1}{3})=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{4}\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\frac{4-1}{64}=\frac{3}{64}$

Se puede observar en este caso que f(x/y) no depende de y, entonces es igual a g(x).

Si ocurriera que f(x/y) no dependiera de x, entonces f(x/y) = h(y). En este caso se puede hacer la siguiente afirmación:

si $f(x,y)=g(x)\bullet h(y)$

entonces las variables X y Y son <u>independientes</u>, o bien estadísticamente independientes.

Para nuestro ejemplo:

$f(x,y)=\frac{x(1+3y^2)}{4}$, $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(y)=\frac{1+3y^2}{2}$

Entonces:

$g(x)\cdot h(y)=\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1+3y^2}{2}\right)=f(x,y)$

Se puede afirmar que las variables aleatorias X y Y son estadísticamente independientes.

¿Cómo se puede determinar la independencia de las variables aleatorias discretas en una tabla de distribución conjunta?

Esperanza de una distribución conjunta

Recordando que:

$$\mathrm{E}[h(x)] = \sum_{\forall x} h(x)\, p(x)$$ Para caso discreto

$$\mathrm{E}[h(x)] = \int_a^b h(x)\, f(x)dx$$ Para caso continuo

Para las variables aleatorias conjuntas:

$$\mathrm{E}[h(x,y)] = \sum_x \sum_y h(x,y)\, f(x,y)$$ Para caso discreto

$$\mathrm{E}[h(x,y)] = \int_c^d \int_a^b h(x,y)\, f(x,y)dxdy$$ Para caso continuo

Ejemplo:

Obtener el valor esperado de xy a partir de la tabla.

y x	0	1	2	h(y)
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
g(x)	10/28	15/28	3/28	1

$$\mathrm{E}[x,y] = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y} x \bullet y f(x,y) = (0)(0)\frac{3}{28} + (1)(0)\frac{9}{28} + (2)(0)\frac{3}{28} + (0)(1)\frac{6}{28} +$$

$$(1)(1)\frac{6}{28} + (2)(1)0 + (0)(2)\frac{1}{28} + (1)(2)0 + (2)(2)0 = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Obtener la $\mathrm{E}[y/x]$ para la distribución conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+3xy^2}{4} \; 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ \qquad\qquad 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[y/x] = \int_0^1\int_0^2 \frac{y}{x}\left(\frac{x+3xy^2}{4}\right)dxdy = \int_0^1\int_0^2 \frac{xy+3xy^3}{4x}dxdy = \int_0^1\int_0^2 \frac{y+3y^3}{4}dxdy = \int_0^1 \frac{2(y+3y^3)}{4}dy =$$

$$\int_0^1 \frac{y+3y^3}{2}dy = \frac{1}{4}(y^2 + \frac{3}{2}y)\Big]_0^1 = \frac{1}{4}(1+\frac{3}{2}) = \frac{5}{8}$$

Teorema:

Sean X e Y dos variables aleatorias independientes entonces:

$$\mathrm{E}[x \bullet y] = \mathrm{E}[x] \bullet \mathrm{E}[y]$$

$$\mathrm{E}[x \bullet y] = \int_0^1\int_0^2 xy\left[\frac{x+3xy^2}{4}\right]dxdy =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^2 (x^2y + 3x^2y^3)dx\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^3y}{3} + x^3y^3\Big]_0^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{8}{3}y + 8y^3\right)dy = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}y^2 + 2y^4\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}+2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Comprobación:

$$\mathrm{E}[x] = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^2 (x^2 + 3x^2y^2)dxdy = \frac{1}{4}\int_0^1\left[\frac{x^3}{3} + x^3y^2\right]_0^2 dy = \frac{1}{4}\int_0^1\left[\frac{8}{3} + 8y^2\right]dy = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}y + \frac{8}{3}y^3\right)_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$E[y]=\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^2\left(xy+3xy^3\right)dxdy=\frac{1}{4}\int_0^1\left[\frac{x^2y}{2}+\frac{3}{2}x^2y^2\right]_0^2 dy=\frac{1}{4}\int_0^1\left[2y+6y^3\right]dy=$$

$$\frac{1}{4}\left[y^2+\frac{3}{2}y^4\right]_0^1=\frac{1}{4}\left[1+\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

$$\therefore\ E[x\bullet y]=E[x]\bullet E[y]$$

$$\frac{5}{6}=\frac{4}{3}\bullet\frac{5}{8}$$

$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$ por lo tanto, las variables aleatorias conjuntas X y Y son independientes.

COVARIANZA

La covarianza de dos variables aleatorias conjuntas X e Y con medias μ_x y μ_y respectivamente está dada por

$$\sigma_{xy}=E\left[\left(x-\mu_x\right)\left(y-\mu_y\right)\right]$$

o sea:

$$\sigma_{xy}=E[xy]-E[x]\bullet E[y] \qquad \text{Covarianza}$$

Corolario:

Si X e Y son variables aleatorias conjuntas independientes, entonces:

$$\sigma_{xy}=0$$

Ejemplo: Obtener la covarianza para la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

Caso discreto

y \ x	0	1	2	h(y)
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	6/28	6/28	0	12/28
2	1/28	0	0	1/28
g(x)	10/28	15/28	3/28	1

$$\sigma_{xy} = \text{cov}[x, y] = \text{E}[xy] - \text{E}[x] \bullet \text{E}[y]$$

$$\text{E}[xy] = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} xyP(x, y)$$

$$\text{E}[xy] = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} xyP(x, y) =$$

$$(0)(0)\frac{3}{28} + (1)(0)\frac{9}{28} + (2)(0)\frac{3}{28} + (0)(1)\frac{6}{28} + (1)(1)\frac{6}{28} + (2)(1)(0) + (0)(2)\frac{1}{28}$$

$$+(1)(2)(0) + (2)(2)(0) = \frac{6}{28}$$

$$E[xy] = \frac{6}{28}$$

$$E[x] = \sum_{x} xg(x) = 0\left(\frac{10}{28}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{15}{28} + \frac{6}{28} = \frac{21}{28}$$

$$\therefore\ E[x] = \frac{21}{28}$$

$$E[y] = \sum_{y} yh(y) = (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{12}{28}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{12}{28} + \frac{2}{28} = \frac{14}{28}$$

$$\therefore\ E[y] = \frac{14}{28}$$

$$\text{cov}[xy] = \frac{6}{28} - \left(\frac{21}{28}\right)\left(\frac{14}{28}\right) = \frac{6}{28} - \frac{294}{784} = \frac{168 - 249}{784} = \frac{-126}{784}$$

$$\sigma_{xy} = \text{cov}[xy] = -\frac{126}{784} = -\frac{63}{392} = -0.1607$$

Ejemplo.-En un grupo de nueve estudiantes de cierta universidad, cuatro están casados, tres nunca han estado casados y dos están divorciados. Se debe seleccionar a tres de los estudiantes para una práctica. Sea *X* el número de estudiantes casados y *Y* el número de estudiantes que nunca han estado casados entre los tres elegidos para asistir a la práctica.

a) Obtener la distribución de probabilidad conjunta de *X* y *Y*, suponiendo que se seleccionan aleatoriamente a los tres de los nueve estudiantes disponibles.
b) Determinar las funciones marginales.
c) Hallar las funciones condicionales.
d) Calcular la covarianza para determinar si las variables aleatorias conjuntas son independientes.

a) $P(x, y) = \dfrac{\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}\binom{k_3}{x_3}}{\binom{N}{n}}$

$$P(0,1)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{28}$$

$$P(0,2)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{14}$$

$$P(0,3)=\frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{84}$$

$$P(1,0)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{21}$$

$$P(1,1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{2}{7}$$

$$P(1,2)=\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{7}$$

$$P(2,0)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{7}$$

$$P(2,1)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{3}{14}$$

$$P(3,0)=\frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}\binom{2}{0}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{21}$$

b)

y\x	0	1	2	3	h(y)
0	0	1/21	1/7	1/21	5/21
1	1/28	2/7	3/14	0	13/28
2	1/14	1/7	0	0	3/14
3	1/84	0	0	0	1/84
g(x)	5/42	10/21	5/14	1/21	1

c)

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{h(y)}$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}$$

f(x/y=0)

X	0	1	2	3
f(x,0)	0	1/21	1/7	1/21

f(x/y=1)

X	0	1	2	3
f(x,1)	1/28	2/7	3/14	0

$$\sigma_{xy}=\operatorname{cov}[xy]=E[xy]-E[x]\bullet E[y]$$

$$E[xy]=\sum_x\sum_y xyf(x,y)$$

$$\sigma_x=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_x=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$E[xy]=(0)(0)(0)+(1)(0)\left(\frac{1}{21}\right)+(2)(0)\left(\frac{1}{7}\right)+(3)(0)\left(\frac{1}{21}\right)+(0)(1)\left(\frac{1}{28}\right)+(1)(1)\left(\frac{2}{7}\right)+(2)(1)\left(\frac{3}{14}\right)+(3)(1)(0)+(0)(2)\left(\frac{1}{14}\right)$$

$$+(1)(2)\left(\frac{1}{7}\right)+(2)(2)(0)+(3)(2)(0)+(0)(3)\left(\frac{1}{84}\right)+(1)(3)(0)+(2)(3)(6)+(3)(3)(0)=\frac{2}{7}+\frac{6}{14}+\frac{2}{7}=1$$

$$E[x]=\sum_{\forall x} xg(x)=0\left(\frac{5}{42}\right)+1\left(\frac{10}{21}\right)+2\left(\frac{5}{14}\right)+3\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}+\frac{10}{14}+\frac{3}{21}=\frac{4}{3}$$

$$E[y]=\sum_{\forall y} yh(y)=8\left(\frac{5}{21}\right)+1\left(\frac{15}{21}\right)+2\left(\frac{3}{14}\right)+3\left(\frac{1}{84}\right)=1$$

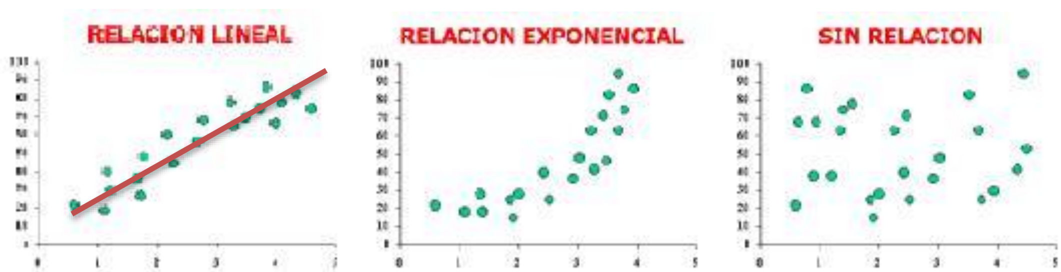
$$\text{cov}=1-\left(\frac{4}{3}\right)(1)$$

$\text{cov}=-\dfrac{1}{3}$ son dependientes

"Si la cov = 0, entonces son independientes"

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

El coeficiente de correlación lineal mide el grado de la relación entre las variables X y Y. Este coeficiente se aplica cuando la relación que pudiera existir entre las variables es lineal (es decir, si representáramos en un gráfico los pares de valores de las dos variables, la nube de puntos se aproximaría a una recta).



El coeficiente de correlación se obtiene a partir de la expresión:

$$\rho=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \qquad -1\le\rho\le 1$$

Donde σ_{xy} es la covarianza, σ_x y σ_y son las desviaciones estándar de X y Y respectivamente.

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$$
$$\sigma_y^2 = E[y^2] - E^2[y]$$

$$E\left[x^2\right] = \sum_{\forall x} x^2 g(x) = (0)^2\left(\frac{5}{42}\right) + (1)^2\left(\frac{10}{21}\right) + (2)^2\left(\frac{5}{14}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21} + \frac{20}{14} + \frac{9}{21} = \frac{7}{3}$$
$$E\left[y^2\right] = \sum_{\forall y} x^2 h(y) = (0)^2\left(\frac{5}{21}\right) + (1)^2\left(\frac{15}{28}\right) + (2)^2\left(\frac{3}{14}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{84}\right) = \frac{15}{28} + \frac{12}{14} + \frac{9}{84} = \frac{3}{2}$$

por lo tanto:

$$\sigma_x^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{5}{9}} = 0.7454$$

$$\sigma_y^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.7071$$

entonces, el coeficiente de correlación es::

$$\rho = \frac{-\frac{1}{3}}{(0.7454)(0.7071)} = -0.6324$$