TEMA IV: MODELOS PROBABILÍSTICOS COMUNES.

Objetivo: El alumno conocerá algunas de las distribuciones más utilizadas en la práctica de la Ingeniería y seleccionará la más adecuada para analizar algún fenómeno aleatorio en particular.

$$\text{Distribuciones para variable aleatoria Discreta}\begin{cases}\text{*Distribución uniforme discreta}\\ \text{*Ensayo o experimento de Bernoulli}\\ \text{*Distribución Binomial}\\ \text{*Distribución Geometrica}\\ \text{*Distribución Binomial Negativa o de Pascal}\\ \text{*Distribución Poisson}\\ \text{*Aproximación de Poisson a la Binomial}\end{cases}$$

$$\text{Distribuciones para variable aleatoria Continúa}\begin{cases}\text{*Distribución uniforme continúa o rectangular}\\ \text{*Distribución normal}\\ \text{*Distribución Binomial}\\ \text{*Aproximación Normal a la Distribución Binomial}\\ \text{*Distribución Exponencial}\\ \text{*Numeros Aleatorios}\end{cases}$$

* Distribución Uniforme Discreta.

	x_i	$P(x_i)$	$x_i P(x_i)$	$x_i^2 P(x_i)$
a	x_1	$\frac{1}{n}$	$x_1 \frac{1}{n}$	$x_1^2 \frac{1}{n}$
	x_2	$\frac{1}{n}$	$x_2 \frac{1}{n}$	$x_2^2 \frac{1}{n}$
	.....	.....	.....	.....
b	x_n	$\frac{1}{n}$	$x_n \frac{1}{n}$	$x_n^2 \frac{1}{n}$
	$\sum$	1	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

-Media o valor esperado:

$$\mu_x = E[x] = \sum_{\forall x} xP(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$$
$$E[x^2] = \sum_{\forall x} x^2 P(x)$$
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

O también:

$$\mu_x = \frac{b+a}{2}$$
$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Ejemplo:

x_i	P(x_i)	x_iP(x_i)	x_i^2P(x_i)
1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	2/6	4/6
3	1/6	3/6	9/6
4	1/6	4/6	16/6
5	1/6	5/6	25/6
6	1/6	6/6	36/6
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	1	21/6	91/6

$$\mu_X = E[X] = \sum_{\forall x} x_i = \frac{21}{6} = 3.5$$
$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x] = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = 15.1667 - 12.25 = 2.9167$$
$$E[x^2] = \frac{91}{6}$$

-Con la otra fórmula:

$$\sigma_X^2 = \frac{(6-1+1)^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2.9167$$

*ENSAYO O EXPERIMENTO DE BERNOULLI.

Sea el experimento aleatorio que consta de dos resultados únicamente, uno de los resultados se denomina “éxito” y al otro “fracaso”, sin que esto signifique un juicio de valor.

La probabilidad de éxito se denomina P:

P (éxito)=p

P (fracaso)=1-p=q

Definamos la variable aleatoria X como el número de éxitos, entonces.

X= {0,1}

por lo que la distribución de probabilidad correspondiente es:

x	P (x)	x P (x)	$X^2P(x)$
0	1-p	0	0
1	p	p	p
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	1	p	p

-Media o valor esperado:

$$\mu_x = E[x] = \sum_{\forall x} xP(x)$$
$$\mu_x = p \to media$$

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x] = p - p^2 = p(1-p) = \boxed{p * q}$$
$$E[x^2] = \sum x^2 P(X) = p$$

Si p=q=0.5, entonces se tiene la varianza más alta o la “peor variación”.

***DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.**

Sea el ensayo de Bernoulli que se repite n veces, entonces una secuencia de resultados sería:

$$\underbrace{p*p*q*q*q*q*q*q*\ldots\ldots\ldots\ldots*p*p*q}_{\boxed{\text{n ensayos}}}$$

Se supone que hay x éxitos con n ensayos y en consecuencia hay n-x fracasos:

$$\overbrace{p*p*p*p\ldots\ldots}^{\boxed{x}}\ldots\ldots\ldots\overbrace{q*q*q}^{\boxed{n-x}} \;=\; p^x * q^{n-x}$$

$$p(x\acute{e}xitos) = p_n^{x,n-x} * p^x * q^{n-x}$$
$$p_n^{x,n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} = c_n^x = \binom{n}{x}$$
$$\boxed{p(x\acute{e}xitos) = \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}, x = 0,1,2,\ldots\ldots,n} \Rightarrow \boxed{\text{Distribución Binomial}}$$

Para que se defina una función masa de probabilidad debe cumplirse que la suma de probabilidades de x éxitos sea:

$$\sum_{\forall x} P(x) = 1$$

O sea:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^{x} * q^{n-x} = 1$$

Del teorema del binomio:

$$n \in \Re \quad (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b^n$$

Si n es entero y positivo:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^{n-0}b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}b^1 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} a^{n-n}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}b^r$$

$$(q+p)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} q^{n-x} p^{x} = 1$$

-Media o valor esperado:

$$\mu_x = E[x] = \sum_{\forall x} xP(x)$$

$$\mu_x = \sum_{\forall x} x \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}$$

$$\mu_x = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x * q^{n-x}$$

$$\mu_x = \sum_{x=1}^{n} \frac{x * n(n-1)!}{x * (x-1)!(n-x)!} p * p^{x-1} * q^{n-x}$$

$$\mu_x = np \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} * q^{n-x}; \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} * q^{n-x} = (q+p)^{n-1} = 1$$

$\boxed{\mu_x = np} \Rightarrow$ Media o valor esperado

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}$$

si hacemos $x^2 = x(x-1) + x$

$$x^2 = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

donde:

$$\sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = np$$

$$E[x^2] = \sum_{x=2}^{n} \frac{x(x-1)(n)(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{(x-2)} q^{n-x} + np$$

$$E[x^2] = n(n-1) p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{(x-2)} q^{n-x} + np;$$

donde: $\displaystyle\sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{(x-2)} q^{n-x} = (q+p)^{n-2} = 1$

$$E[x^2] = n(n-1)p^2 + np$$
$$\sigma_x^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$
$$\sigma_x^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$
$$\sigma_x^2 = np(1-p)$$
$$\boxed{\sigma_x^2 = npq} \Rightarrow \text{Varianza}$$

El experimento Binomial debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. El experimento consta de n ensayos estadísticamente independientes y repetidos.
2. Cada ensayo tiene dos resultados posibles: uno llamado "*éxito*" y el otro "*fracaso*". (Cada ensayo es un experimento de Bernoulli).
3. La probabilidad de éxito en cada ensayo es la misma e igual a "p" y la de fracaso, "q", donde p + q = 1.
4. Consta de una variable aleatoria discreta X, asociada al experimento que cuenta el número de éxitos en los n ensayos o el número de ensayos con éxito, entonces los valores de X son : X = {0, 1, 2, 3, … , n}.

n – pruebas de ensayo

Ensayos independientes

Ejemplo: $P(x) = \binom{n}{x} p^x * q^{n-x}$, x=0,1,2,3,............,n

Obtener las distribuciones de probabilidad binomial para los siguientes casos. Trazar las gráficas correspondientes.

a) n=6, p=0.3
b) n=6, p=0.5
c) n=6, p=0.7

a)

X	P(x)
0	0.1176
1	0.3025
2	0.3241
3	0.1852
4	0.0592
5	0.0102
6	0.0007
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	1

$$P(x=0)=\binom{6}{0}(0.3)^0(0.7)^6=0.1176$$

$$P(x=1)=\binom{6}{1}(0.3)^1(0.7)^5=0.3025$$

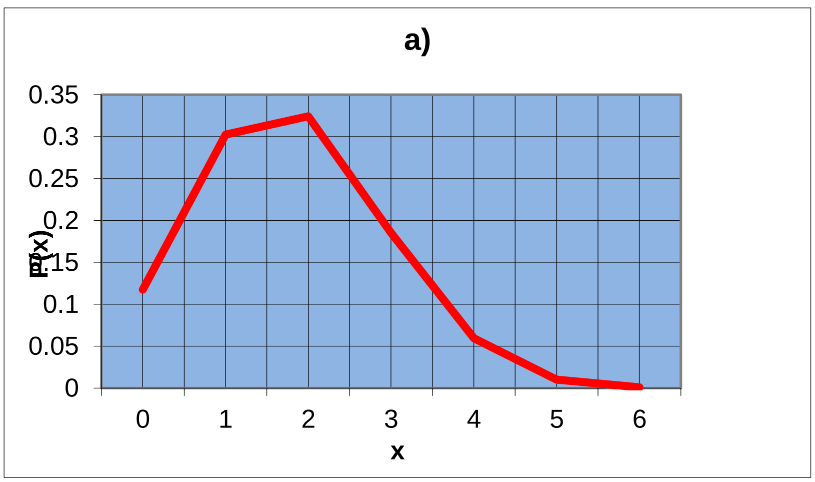
$$P(x=2)=\binom{6}{2}(0.3)^2(0.7)^4=0.3241$$

$$P(x=3)=\binom{6}{3}(0.3)^3(0.7)^3=0.1852$$

$$P(x=4)=\binom{6}{4}(0.3)^4(0.7)^2=0.0595$$

$$P(x=5)=\binom{6}{5}(0.3)^5(0.7)^1=0.0102$$

$$P(x=6)=\binom{6}{6}(0.3)^6(0.7)^0=0.0007$$



b)

X	P(x)
0	0.0156
1	0.0937
2	0.2344
3	0.3125
4	0.2344
5	0.0937
6	0.0156

$$P(x=0)=\binom{6}{0}(0.5)^0(0.5)^6=0.0156$$

$$P(x=1)=\binom{6}{1}(0.5)^6=0.0937$$

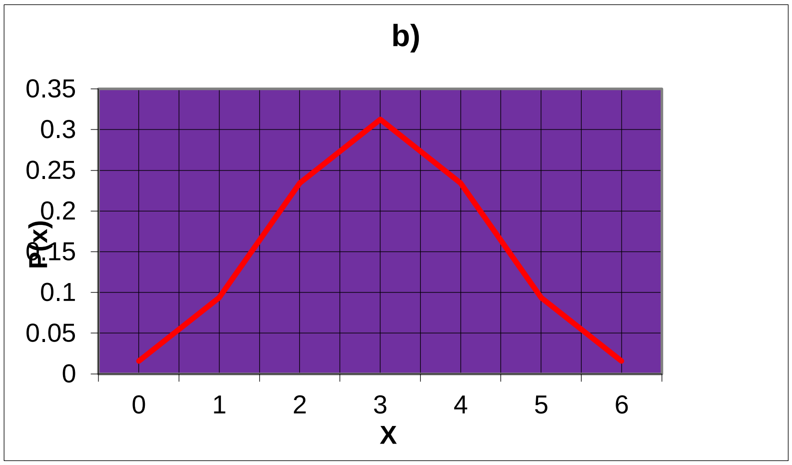
$$P(x=2)=\binom{6}{2}(0.5)^6=0.2344$$

$$P(x=3)=\binom{6}{3}(0.5)^6=0.3125$$

$$P(x=4)=\binom{6}{4}(0.5)^6=0.2344$$

$$P(x=5)=\binom{6}{5}(0.5)^6=0.09375$$

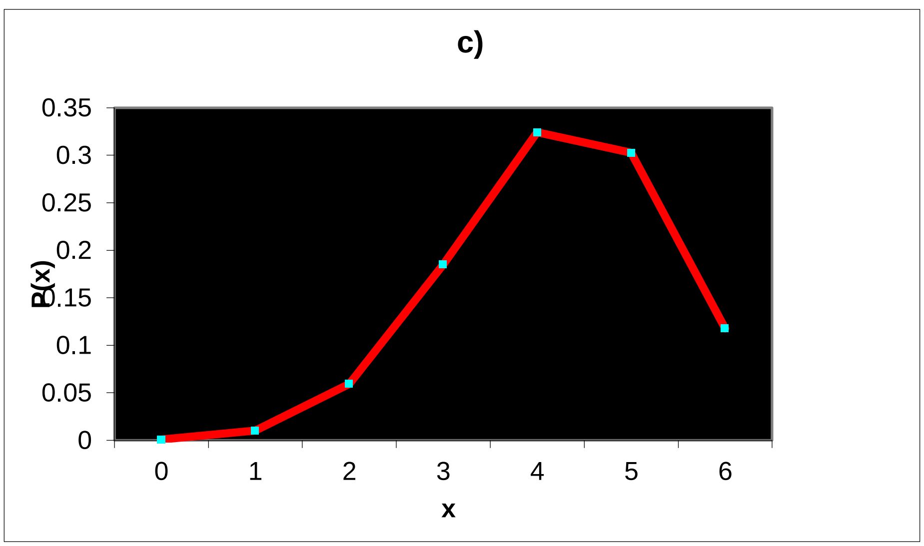
$$P(x=6)=\binom{6}{6}(0.5)^6=0.0156$$



c)

X	P(x)
0	0.0007
1	0.0102
2	0.0595
3	0.1852
4	0.3291
5	0.3025
6	0.1176

$\Longrightarrow$ Es el recíproco del inciso a)



Ejemplo: La probabilidad de que un paciente se recupere de una enfermedad sanguínea es 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad, ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Sobrevivan al menos 10.
b) Sobrevivan entre 3 y 8 inclusive.
c) Sobreviven exactamente 5.

$$P(x) = b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$$

a) $P(x \geq 10) = P(10)+P(11)+P(12)+P(13)+P(14)+P(15) = 1-F(9) = 1-0.9662 = 0.0338$

n=15

p=0.4=1-F (9)

$$\boxed{\sum_{x=0}^{9} P(x)}$$

X	P(X)	F(X)
0	0.0005	0.0005
1	0.0047	0.0052
2	0.0219	0.0271
3	0.0634	0.0905
4	0.1268	0.2173
5	0.1859	0.4032
6	0.2066	0.6098
7	0.1771	0.7869
8	0.1181	0.9050
9	0.0612	0.9662

$$P(x \geq 10) = 1 - 0.9662$$
$$p(x \geq 10) = 0.0338$$

$$P(0) = \binom{15}{0}(0.4)^0(0.6)^{15} = 0.0005$$
$$P(1) = \binom{15}{1}(0.4)^1(0.6)^{14} = 0.0047$$
$$P(2) = \binom{15}{2}(0.4)^2(0.6)^{13} = 0.0219$$
$$P(3) = \binom{15}{3}(0.4)^3(0.6)^{12} = 0.0634$$
$$P(4) = \binom{15}{4}(0.4)^4(0.6)^{11} = 0.1268$$
$$P(5) = \binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10} = 0.1859$$
$$P(6) = \binom{15}{6}(0.4)^6(0.6)^9 = 0.2066$$
$$P(7) = \binom{15}{7}(0.4)^7(0.6)^8 = 0.1771$$
$$P(8) = \binom{15}{8}(0.4)^8(0.6)^7 = 0.1181$$
$$P(9) = \binom{15}{9}(0.4)^9(0.6)^6 = 0.0612$$

b)

$$P(3 \leq x \leq 8) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) + P(8) = F(8) - F(2) = 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$$

c)

$$P(x = 5) = P(5) = 0.1859$$

d) Media, Varianza y Desviación Estándar:

$$\mu_x = np = (15)(0.4) = 6$$
$$\sigma_x^2 = npq = (15)(0.4)(0.6) = 3.6$$
$$\sigma_x = 1.8974$$

Ejercicio: El promedio de bateo de un jugador de béisbol es de 0.25. ¿Cuál es la probabilidad de que pegue exactamente hit en sus cuatro siguientes turnos?

$$p = 0.25$$
$$n = 4$$
$$x = 1$$

$$P(x=1) = \binom{4}{1}(0.25)^1(0.75)^3 = 0.4219$$

Ejercicio: Al probar cierto tipo de neumático para camión para terreno escarbado se sabe que un 25% de los camiones no terminan la prueba por ponchadura de neumático. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 5 y 10 de los siguientes 15 camiones sufran una ponchadura?

$$n = 15$$
$$P = 0.25$$
$$q = 0.75$$

$$P(x) = \binom{15}{x}(0.25)^x(0.75)^{15-x}$$
$$P(5 \le x \le 10) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10)$$
$$P(5 \le x \le 10) = F(10) - F(4) = 0.3123$$

X	P(X)
5	0.1651
6	0.0917
7	0.0393
8	0.0131
9	0.0034
10	0.3133

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

***DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL.**

Si un ensayo puede dar E_x resultados con probabilidades P_k, la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $x_1, x_2, ...x_k$, que representan el número de ocurrencias para los k resultados en n intentos independientes es:

$$P(x_1, x_2, ...x_k; P_1, P_2, ..., P_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, ...x_k} P_1^{x_1}, P_2^{x_2}, ..., P_k^{x_k}$$

$$\sum x_k = n \qquad \sum P_k = 1$$

Ejemplo: De acuerdo con la teoría de la genética cierto cruce de conejillos de indias da por resultado crías rojas, negras y blancas en un proporción 8:4:4. Halle la probabilidad de que, en 8 descendientes, 5 sean rojos y 2 negros y un blanco.

$$8(rojos):4(negros);4(blan\cos)$$

$$\frac{8}{16}, \frac{4}{16}, \frac{4}{16} \qquad \text{P(5r,2n,15)=} \frac{8!}{5!2!1!} = \binom{8}{10}^5 \binom{4}{10}^2 \binom{4}{16}^1$$

$$\text{P(5r,2n,15)} = 168(0.0313)(0.0625)(0.25) = \boxed{0.0820}$$

***DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA.**

Si los ensayos repetidos independientes tienen un éxito con *p* y un fracaso de probabilidad 1-*p* = *q*. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, es el número de ensayos en que ocurre el primer éxito está dado por:

X= número de ensayos.

$$\underbrace{\overbrace{q*q*q*q*q\ldots\ldots\ldots}^{\text{x-1}}\text{.q*p}}_{\text{X ensayos independientes}}$$

$$\boxed{g(x,p) = q^{x-1}p} \qquad \mu_x = \frac{1}{p}; \quad \sigma_x^2 = \frac{q}{p^2}$$

Media Varianza

Ejemplo:

Si se sabe que en cierto proceso de fabricación, en promedio 1 de cada 100 piezas esta defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que se inspeccionen 5 piezas para encontrar una defectuosa? Calcular el valor esperado y la varianza.

$$g(5, 0.01) = (0.99)^4(0.01) = 0.0096$$

$$\mu_x = \frac{1}{0.01} = 100 \qquad \sigma_x^2 = \frac{0.99}{(0.01)^2} = 9900; \quad \sigma_x = 99.5$$

*DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA O DE PASCAL

$$\overbrace{\underbrace{q*p*q*p\ldots\ldots\ldots}_{\boxed{X-1}}p}^{\boxed{X=10}}$$

$$\binom{x-1}{r-1} p^{r-1} q^{x-r} p$$

$$\binom{x-1}{r-1} p^{r} q^{x-r}$$

Si ensayos repetidos independientes con probabilidad de éxito *p* y de fracaso 1-*p*=*q* entonces la probabilidad de la variable aleatoria X, que es el número de ensayos en que ocurre el r – ésimo éxito, está dado por:

$$b*(x, r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad x=r+1, r+2.....$$

$$\mu_x = \frac{r}{p}; \qquad \sigma_x^2 = \frac{rq}{p^2}$$

Ejemplo:

1.- Encuentre la probabilidad de que al lanzar 3 monedas al aire se obtengan 3 águilas por segunda vez en el quinto intento.

aaa
aas
asa
saa
ass
sas
ssa
sss

K=1/8

$$b*\left(5,2,\frac{1}{8}\right)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{3}=0.0419$$

$$\mu_x=\left(\frac{2}{\frac{1}{8}}\right)=16 \qquad \sigma_x^2=\frac{2*\frac{7}{8}}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=112; \qquad \sigma_x=\sqrt{112}=10.58$$

2.- Tres personas tiran monedas al aire y el disparejo paga el café. Si los tres resultados son iguales las monedas se tiran nuevamente. Encuentre la probabilidad de que se necesiten menos de cuatro intentos.

$$P=\frac{3}{4}$$

$$g\left(1,\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$$g\left(2,\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{16}$$

$$g\left(3,\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{64}$$

$$p(x\le 3)=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{63}{64}$$

Ejercicio:

La probabilidad de que un estudiante de aviación apruebe el examen escrito para obtener su licencia de piloto es de 0.7. Encuentre la probabilidad de que una persona apruebe el examen.

a) En el tercer intento.
b) Antes del cuarto intento

$$P = 0.7$$
$$a) g(3,0.7) = (0.3)^2 (0.7) = 0.063$$
$$b) g(1,0.7) = (0.3)^0 (0.7) = 0.7$$
$$g(2,0.7) = (0.3)^1 (0.7) = 0.21$$
$$P(x \leq 3) = 0.973$$

***DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA**

En esta distribución de variable aleatoria X se refiere al número de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n seleccionada entre N elementos de una población o lote de los cuales x son éxitos y (N-k) son fracasos, es decir:

$$h(x,k,n,N) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{N}; \qquad x=0,1,2,3,.........,k$$
$$x=0,1,2,3,.........,n$$

$\mu = np$

-Media o Valor esperado:

$$\mu = n\left(\frac{k}{N}\right)$$

-Varianza:

$$\sigma_x^2 = n\left(\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{k}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$donde:$$

$$\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \text{corrección por población finita}$$

-Desviación estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x}$$

Ejemplo:

Se extraen 5 cartas de una baraja de 52. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

a) Un as.
b) Por lo menos un as.

N=52 n=5 k=4

a) $$P(x=1) = \frac{\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{48}{4}\right)}{\frac{52}{5}} = 0.299$$

b) $$P(x \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\left(\frac{4}{0}\right)\left(\frac{48}{4}\right)}{\frac{52}{5}} = 1 - 0.6588 = 0.3412$$

Ejemplo:

Unos lotes de 40 componentes cada uno son aceptados si no contienen más de tres componentes defectuosos. El procedimiento para muestrear un lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazarlo si se encuentra al menos uno defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad:

a) De encontrar exactamente un componente defectuoso en la muestra si hay tres defectuosos en el lote.
b) De aceptar el lote.

N=40 n=5 k=3

a)

$$P(x=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0.3011$$

b)

$$P(rechazar)=P(x\geq 1)=1-P(0)=1-\frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}}=0.3376$$

$$P(aceptar)=1-0.3376=0.6624$$

c)

$$\mu_x=5\left(\frac{3}{40}\right)=0.375$$

$$\sigma_x^2=5\left(\frac{3}{40}\right)\left(1-\frac{3}{40}\right)\left(\frac{40-5}{40-1}\right)=0.3113$$

$$\sigma_x=0.5579$$

*DISTRIBUCIÓN DE POISSON

La distribución de Poisson es otra distribución para variable aleatoria discreta, cuyo nombre se debe al matemático francés, Simeon Denis Poisson (1781-1840), quien la introdujo en 1837. Tiene grandes aplicaciones en biología, medicina, física, ingeniería, investigación de operaciones, etc.

La distribución de Poisson se obtiene al considerar que en la distribución binomial el número n de veces que se repite el experimento de Bernoulli tiende a infinito, mientras que la probabilidad de éxito p tiende a cero.

Supongamos que X es una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p) y sea $\lambda = np$ entonces:

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\; p^x (1-p)^{n-x}$$

Extrayendo a n de cada factor del cociente y agrupando todos los obtenidos con la potencia de p

$$P(x) = 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)\frac{(np)^x (1-p)^n}{x!\,(1-p)^x}$$

Haciendo $\lambda = np$

Se obtiene

$$P(x) = 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{x-1}{n}\right)\frac{\lambda^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{x!\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

Considerando ahora que $n \to \infty$ pero de tal manera que λ permanezca constante.

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

el límite que aparece en la expresión anterior tiende a $e^{-\lambda}$

por lo que finalmente:

$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ Distribución de Poisson

Donde $x = 0, 1, 2, 3, ...$

Comprobando de que efectivamente define una distribución de probabilidad:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Media o valor esperado:

$$\mu = E[x] = \sum_{x=0}^{\infty} xP(x)$$

Donde el primer término de la serie vales cero. Ahora bien:

$$\mu = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\right) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$\boxed{\mu = \lambda}$$

Varianza

$$\sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1) + x]P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)P(x) + \sum_{x=0}^{\infty} x\,P(x)$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots\right) + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

Entonces: $$\sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = \lambda}$$

Si X es el número de ocurrencias de un evento aleatorio en un intervalo de tiempo o espacio (superficie o volumen), la probabilidad de que X ocurra, está dada por la función de probabilidad de Poisson:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La letra griega $\lambda > 0$ (lambda) es el parámetro de esta distribución y es el promedio de ocurrencias del evento aleatorio en el intervalo.

El símbolo e es una constante cuyo valor aproximado a cinco cifras decimales es 2.71828 (base de los logaritmos naturales).

El experimento de Poisson cumple con las siguientes condiciones:

1. Los eventos ocurren en forma independiente, es decir, la ocurrencia de un evento en un intervalo de tiempo o espacio no afecta la probabilidad de una segunda ocurrencia del evento en el mismo u otro intervalo.

2. Teóricamente es posible que el evento pueda ocurrir infinitas veces en el intervalo.

3. La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo es proporcional a la longitud del intervalo.

4. $np = \lambda$ → número de ocurrencias en el espacio de referencia.

Ejemplo:

En cierto proceso de fabricación en el que se producen artículos de vidrio ocurren defectos o burbujas que a veces desaconsejan su venta. Se sabe que en promedio uno de cada 1000 artículos producidos tienen una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 8000 artículos se encuentren menos de 7 artículos con burbujas?

n=8000

p=0.001

$$P(x<7)=\sum_{x=0}^{6}\binom{8000}{x}(0.001)^{x}(0.999)^{8000-x}$$

$$=F(x=6)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$$

- Utilizando la distribución de Poisson como aproximación a la binomial:

$\lambda = np = 8000(0.001) = 8$

$P(0) = \frac{8^0 e^{-8}}{0!} = 0.0003$

$P(1) = \frac{8^1 e^{-8}}{1!} = 0.0027$

$P(2) = \frac{8^2 e^{-8}}{2!} = 0.0107$

$P(3) = \frac{8^3 e^{-8}}{3!} = 0.0286$

$P(4) = \frac{8^4 e^{-8}}{4!} = 0.0573$

$P(5) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0.0916$

$P(6) = \frac{8^6 e^{-8}}{6!} = 0.1221$

$$\boxed{P(x < 7) = 0.3134}$$

Ejercicio:

Cierta zona de un continente sufre en promedio 6 huracanes por año. Encuentre la probabilidad de que, en un año dado:

a) Sufra menos de cuatro huracanes.
b) Sufra entre 6 y 8 huracanes.

$\lambda = 6 \quad \text{huracanes/año}$

$a)$ P(x<4)=P(x $\leq$ 3)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)=0.1512

P(0)=$\frac{6^0 e^{-6}}{0!} = 0.0025$

P(1)=$\frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 0.0149 = \frac{6}{1} P(0)$

P(2)=$\frac{6^2 e^{-6}}{2!} = 0.0446 = \frac{6}{2} P(1)$

P(3)=$\frac{6^3 e^{-6}}{3!} = 0.0892 = \frac{6}{3} P(2)$

Fórmula de recurrencia para el cálculo de probabilidades de Poisson.

$$P_0(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P_0(x+1) = \frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{(x+1)!} = \frac{\lambda \lambda^x e^{-\lambda}}{x!(x+!)}$$

$$P_0(x+1) = \frac{\lambda}{x+1} P_0(x) \Rightarrow \text{ Fórmulas de recurrencia}$$

$b) \quad P(6 \le x \le 8) = P(6) + P(7) + P(8) = 0.4016$

$$P(6) = \frac{6^6 e^{-6}}{6!} = 0.1606$$

$$P(7) = \frac{6^7 e^{-6}}{7!} = 0.1377$$

$$P(8) = \frac{6^8 e^{-6}}{8!} = 0.1033$$

Ejercicio:

En cierto crucero, el promedio de accidentes de tránsito semanales es de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que en el ocurran exactamente 10 accidentes en la próximas dos semanas?

$\lambda = 3 \quad$ accidentes/semana

$\lambda = 6 \quad$ accidentes/2 semanas

$$P_6(x = 10) = \frac{6^{10} e^{-6}}{10!} = 0.0413$$

***DISTRIBUCIÓN PARA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.**

- DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA O RECTANGULAR.

Su función de probabilidad es:

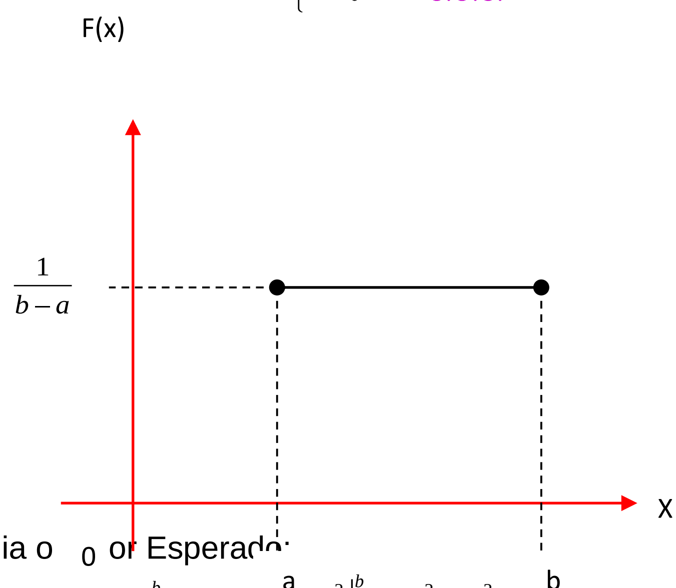
$$f(x)\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq \mathrm{b} \\ 0 & C.O.C. \end{cases}$$

*DISTRIBUCIÓN PARA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

- DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA O RECTANGULAR.

Su función de probabilidad es:

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq \mathrm{b} \\ 0 & C.O.C. \end{cases}$$



- Media o valor Esperado:

$$\mu_x = F(x) = \int_a^b x f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$\boxed{\mu_x = \frac{a+b}{2}} \Rightarrow \text{ Media o valor esperado}$$

- Varianza

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

$$E[x^2] = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2+a^2-2ab}{12} = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}}$$

***DISTRIBUCIÓN NORMAL**

1733 De Moivre

Laplace, Gauss

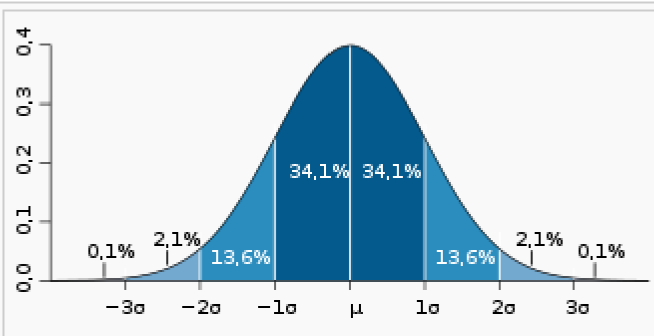
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}; \quad -\infty<x<\infty$$

2, π constantes

μ_x - parámetro de localización

σ_x - parámetro de escala

x - variable aleatoria



Distribución de probabilidad alrededor de la media en una distribución N(μ, σ).

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} dx = 1$$

*DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

$z = \dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x}$ **..........**variable normalizada o tipificada

$\mu_z = \mu = 0$

$\sigma_z = \sigma = 1$

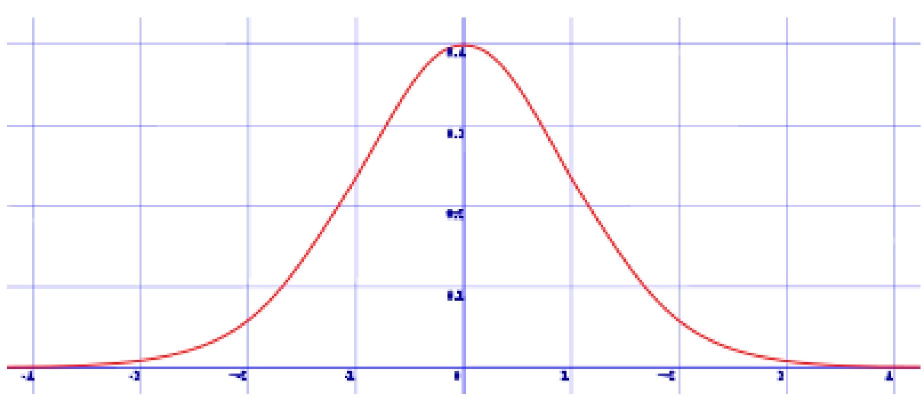
$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}; \quad -\infty < z < \infty$ …Distribución normal estándar

Se puede demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1;$$

Para el cálculo de probabilidades (área bajo la curva normal)

$$P(z_1 < z < z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = F(z_2) - F(z_2)$$

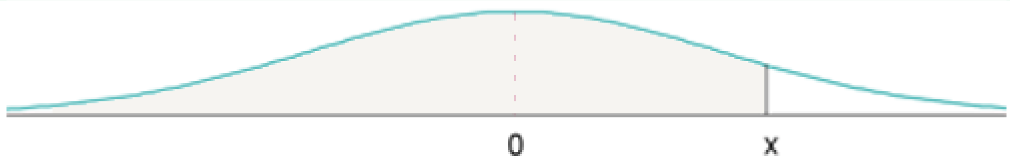


$$P(-1 < z < 1) = F(1) - F(-1) = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$
$$P(-2 < z < 2) = F(2) - F(-2) = 0.9772 - 0.0278 = 0.9544$$
$$P(-3 < z < 3) = F(3) - F(-3) = 0.9987 - 0.0013 = 0.9974$$

Distribución normal estándar

N(0, 1)

La **distribución normal estándar, o tipificada o reducida,** es aquella que tiene por **media** el valor **cero**, **μ =0**, y por **desviación típica la unidad, σ =1**.



La probabilidad de la variable X dependerá del área del recinto sombreado en la figura. Y para calcularla utilizaremos una **tabla**.

Tipificación de la variable

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable **X** que sigue una distribución **N(μ, σ)** en otra variable **Z** que siga una distribución **N(0, 1)**.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

La **tabla** nos da las **probabilidades de P(z ≤ k)**, siendo **z** la variable tipificada.

Estas probabilidades nos dan la **función de distribución$\Phi(k)$**.

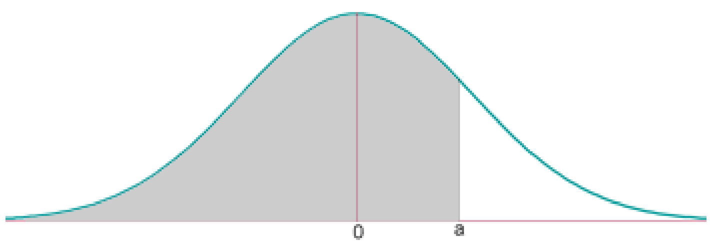
$F(k) = P(z \leq k)$

Búsqueda en la tabla de valor de k

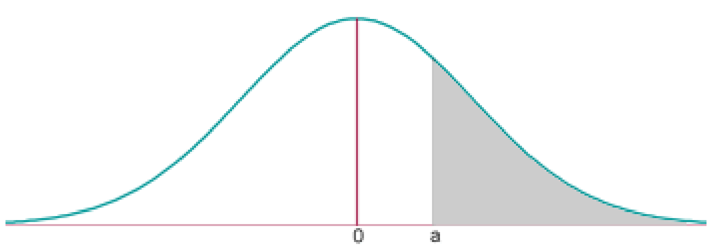
Unidades y décimas en la columna de la izquierda.

Centésimas en la fila de arriba.

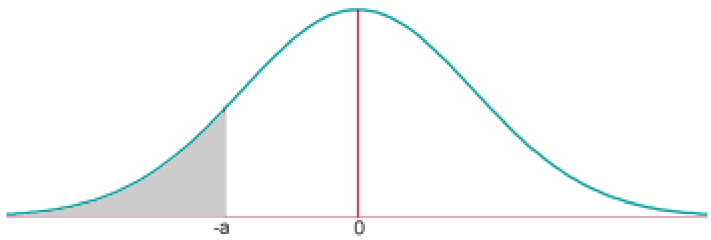
$P(Z \leq a)$



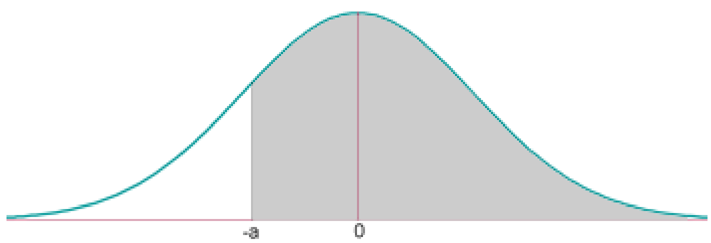
$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$



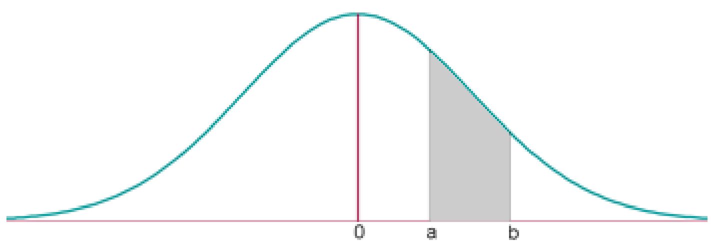
$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$



$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$

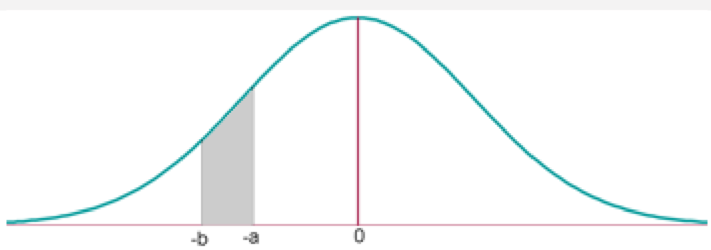


$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$

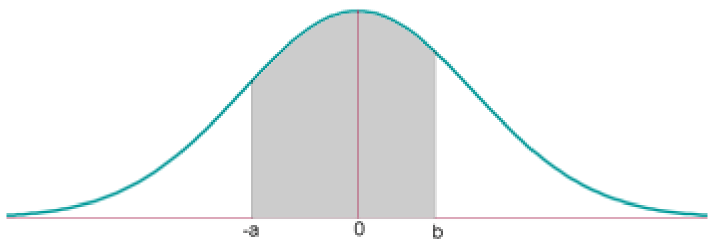


$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$

Nos encontramos con el caso inverso a los anteriores, conocemos el valor de la probabilidad y se trata de hallar el valor de la abscisa. Ahora tenemos que buscar en la tabla el **valor que más se aproxime a K**.



P(−a < Z ≤ b) = P(Z ≤ b) − [1 − P(Z ≤ a)]



p = K

Para calcular la variable **X** nos vamos a la **fórmula de la tipificación.**

1.- Dada una distribución normal con $\mu_x = 50$ y $\sigma_x = 10$, encuentre la probabilidad de que x tome un valor entre 45 y 62.

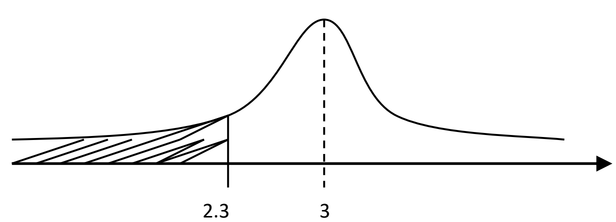
$$N = (x, \mu_x, \sigma_x) = (x, 50, 10) \qquad z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$P(45 < z < 62) = P\left(\frac{45-50}{10} < z < \frac{62-50}{10}\right) = P(-0.5 < z < 1.2)$$

$$=F(1.2)-F(-0.5)=0.8849-0.3085=0.5764$$

2.- Cierto tipo de pila almacenada dura en promedio 3.0 años, con una desviación estándar de 0.5 años. Suponiendo que la vida de las pilas está distribuida normalmente. a) Encuentre la probabilidad de que una pila dada dure menos de 2.3 años. b) Si se toman 10 de estas pilas, ¿Cuál es la probabilidad de que más de una dure menos de 2.3 años?

$N(x, 3, 0.5)$



$$P(x < 2.3) = P\left(z < \frac{2.3-3}{0.5}\right) = P(z < -1.4) = F(-1.4)$$

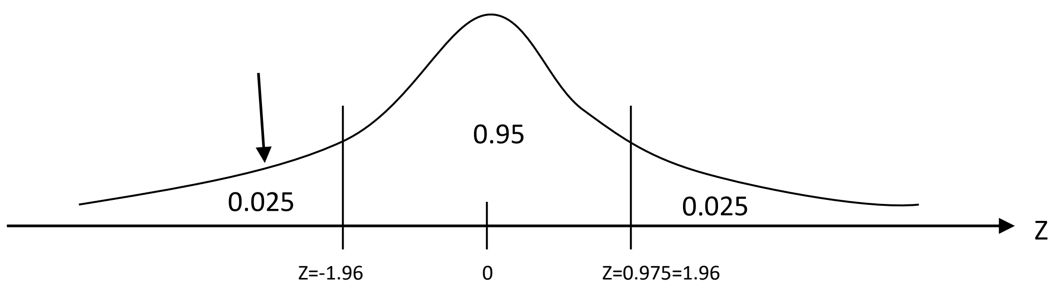
$$\boxed{P(x \le 2.3) = 0.0808}$$

b)

$$b(x, 10, 0.0808)$$
$$P(x > 1) = 1 - [P(0) + P(1)]$$
$$P(0) = \binom{10}{0}(0.0808)^0 (0.9192)^{10} = 0.4306$$
$$P(1) = \binom{10}{1}(0.0808)^1 (0.9192)^9 = 0.3785$$
$$P(x > 1) = 1 - 0.8091 = \boxed{0.1909}$$

3.- Un instrumento de precisión se emplea para rechazar hasta todos los componentes en los cuales cierta dimensión no cumple con la especificación 1.50 $\pm$ d. Si se sabe que esta medición está distribuida normalmente con $\mu = 1.5$ y desviación estándar de 0.2. Determine el valor d para que la especificación cubra el 95% de las mediciones.

$\mu = 1.5$ y $\sigma = 0.2$; $1.50 \pm \mathrm{d}$



$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}; \qquad x = z\sigma_x + \mu_x$$

$$x = \mu_x + d$$

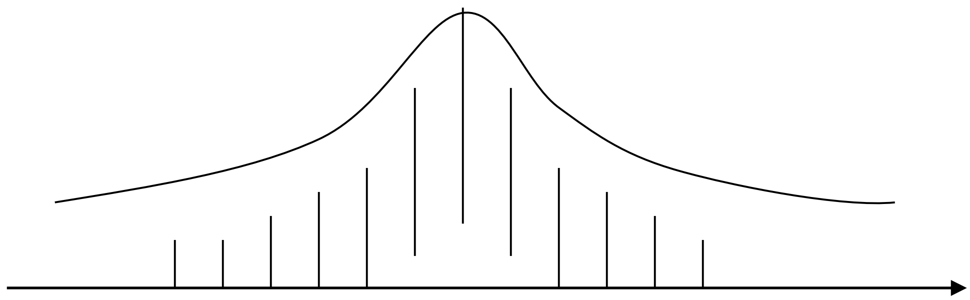
$$1.5 + d = 1.96(0.2) + 1.5$$
$$d = 0.3920$$

***APROXIMACIÓN NORMAL A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.**

$$\lim_{n \to \infty} b(x, n, p) = N(x, np, \sqrt{npq})$$

P=0.15

n>30



Se emplea la variable tipificada:

$$z = \frac{x - np \pm 0.5}{\sqrt{npq}}; \quad 0.5 \rightarrow \text{corrección por continuidad}$$

1. $P(x = k) \approx P\left(\frac{k - np - 0.5}{\sqrt{npq}} \leq z \leq \frac{k - np + 0.5}{\sqrt{npq}} \right)$

2. $P(x \geq k) \approx P\left(z > \frac{k - np - 0.5}{\sqrt{npq}} \right)$

3. $P(x \leq k) \approx P\left(z > \frac{k - np + 0.5}{\sqrt{npq}} \right)$

4. $P(x > k) \approx P\left(z > \frac{k - np + 0.5}{\sqrt{npq}} \right)$

5. $P(x < k) \approx P\left(z > \frac{k - np - 0.5}{\sqrt{npq}} \right)$

Ejercicio:

En un proceso se obtiene el 10% de piezas defectuosas. Si de dicho proceso se seleccionan al azar 100 piezas, ¿Cuál es la probabilidad de que el número de piezas defectuosas exceda de 13?

n=100

P=0.1

$$z = \frac{13-10+0.5}{3} = 1.17$$
$$P(x > 13) = P(z \geq 1.17) = 1 - F(1.17) = 1 - 0.8790 = 0.121$$

Ejercicio:

Un cuestionario de opción múltiple o selección múltiple contiene 200 preguntas cada una con 4 respuestas posibles y de ellas solo 1 es la correcta, ¿Cuál es la probabilidad de que por simple conjetura el alumno obtenga entre 25 y 30 respuestas correctas para 80 de las 200 preguntas cuya respuesta ignora por completo?

n=80

p=0.25

$$P(25 \leq x \leq 30) = P(1.16 \leq z \leq 2.71) = F(2.71) - F(1.16) = 0.9966 - 0.8770 = \boxed{0.1196}$$

$$z_1 = \frac{25-20-0.5}{3.87} = 1.163$$
$$z_2 = \frac{25-20+0.5}{3.87} = 2.713$$

*DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

λ = número de ocurrencias en la unidad de tiempo.

λ

0 0 0 0 0

Estación de Servicio

$\beta = \dfrac{1}{\lambda} =$ tiempo entre dos ocurrencias consecutivas

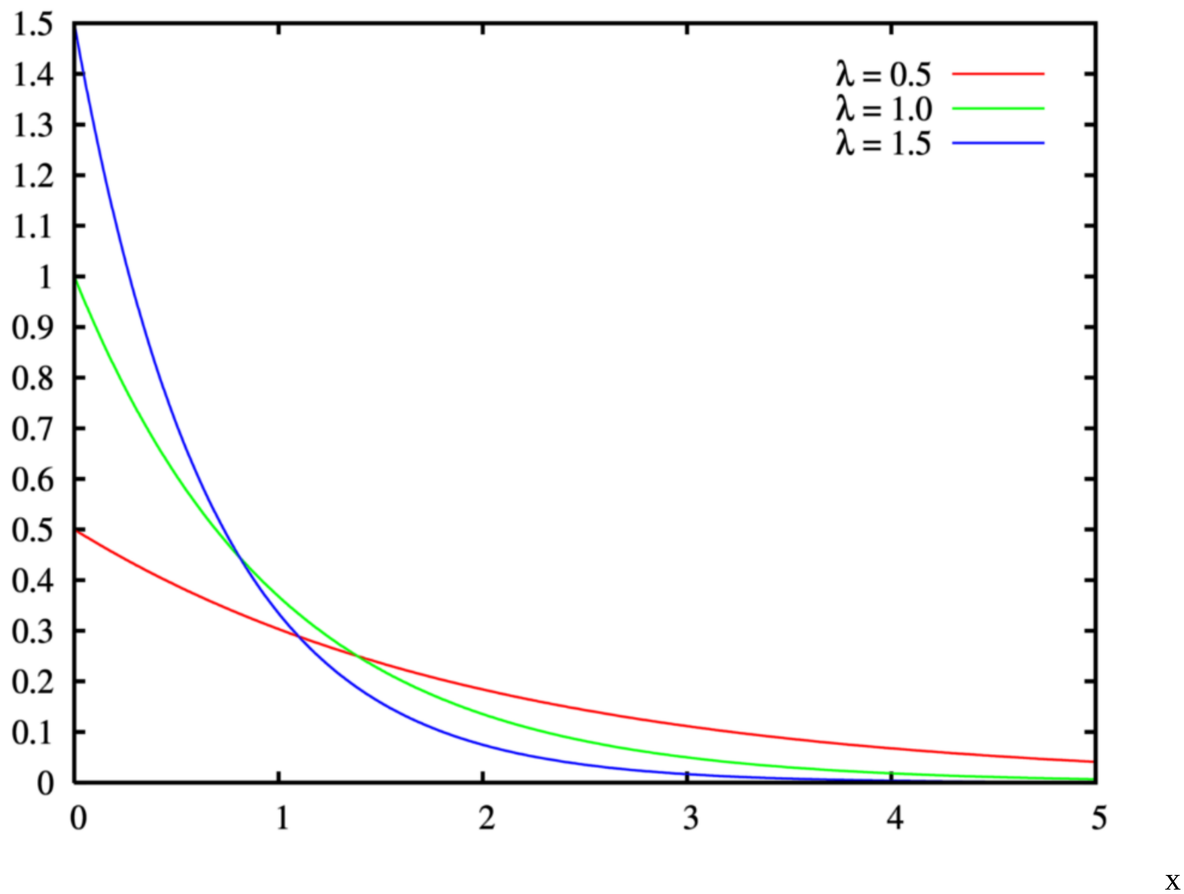
La variable aleatoria continúa x, tiene una distribución exponencial, con parámetro β si su función densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}}; & \text{x} \geq 0, \quad \beta > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Cuando el número de sucesos por unidad de tiempo sigue una distribución de Poisson de parámetro λ (proceso de Poisson), el tiempo entre dos sucesos consecutivos sigue una distribución Exponencial de parámetro β = 1/λ.

De otra forma:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



La distribución exponencial tiene muchas aplicaciones en el campo de la Estadística, particularmente en las áreas de la teoría de confiabilidad y tiempos de espera o en problemas de teorías de colas.

Teorema 1. En la distribución exponencial la media o valor esperado está dada por $\mu = 1/\lambda$, la varianza se da por $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ y por lo tanto la desviación estándar es igual a la media $\sigma = 1/\lambda$.

Teorema 2. Para un valor dado $x = t$, la probabilidad acumulada desde $x = 0$ hasta $x = t$ está dada por:

$$F(x) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

Por consiguiente, la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución exponencial asuma un valor *mayor* (o mayor o igual) se da porque

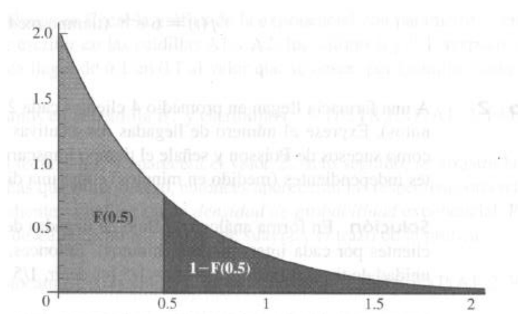
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

En la figura se ilustra la gráfica de una exponencial con parámetro $\lambda = 2$. El valor esperado o media es aquí de 0.5. Con sombreado claro aparece dibujada la probabilidad de que x tenga un valor menor a 0.5 y con sombreado oscuro la probabilidad de que asuma un valor mayor o igual a 0.5.

Área de la izquierda $= F(0.5)$ Area de la derecha $1 - F(0.5)$.

Se puede demostrar fácilmente que el área de la izquierda es aproximadamente 63.2% del área total y que el área de la derecha es aproximadamente el 36.8%.

También se puede demostrar que en la distribución exponencial la probabilidad de que X sobrepase su valor esperado es igual a $1/e$ y la probabilidad de que tome un valor menor (o menor o igual) a la media es precisamente de $1 - \frac{1}{e} = 0.63212$



En resumen:

$P(X \geq x) = \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ = probabilidad a mano derecha de x

$P(X \leq x) = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ = probabilidad a mano izquierda de x

Una propiedad importante es la denominada *carencia de memoria*, que podemos definir así: si la variable X mide el tiempo de vida y sigue una distribución Exponencial, significará que la probabilidad de que siga con vida dentro de 20 años es la misma para un individuo que a fecha de hoy tiene 25 años que para otro que tenga 60 años.

Ejemplo:

El periodo de vida en años de un interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con un promedio de falla de μ =2 años = β
¿cuál es la probabilidad de que al menos ocho de 10 de tales interruptores, que funcionan independientemente, fallen después del 3er año?

Distribución Exponencial

$$\mu = 2 = \beta$$

$$\lambda = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-\lambda t}\Big|_x^\infty = -(0 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

$$(x > 3) = e^{-0.5(3)} = 0.2231$$

Distribución Binomial

$$P(x \geq 8) = P(8) + P(9) + P(10)$$

$$\binom{10}{8}(0.2231)^8(0.7769)^2 + \binom{10}{9}(0.2231)^9(0.7769)^1 + \binom{10}{10}(0.2231)^{10}(0.7769)^0 =$$

$$P(x \geq 8) = 0.0002 + 0.0000 + 0.0000 = 0.0002$$