TEMA 2. VARIABLES ALEATORIAS.

Objetivo: El alumno conocerá el concepto de variable aleatoria y podrá analizar el concepto probabilista de la variable a través de su distribución y sus características numéricas.

Concepto de variable aleatoria: Una variable cuyo valor está determinado por el azar, le llamamos variable aleatoria, su valor no se puede saber con exactitud antes de la realización del experimento.

Variables

- **Determinísticas**: se conoce su resultado antes de realizar el experimento.
- **Aleatorias**: no se conoce su resultado antes de realizar el experimento.

Variables aleatorias

- ✓ Discretas (conteo) $X = X1, X2, \ldots Xn$
- ✓ Continuas (mediciones) $Xinicial \leq X \leq Xfinal$

Las variables aleatorias que tienen un conjunto de posibles valores discretos se llaman "discretas". Estas variables son el resultado de contar (o conteo), por ejemplo: número de llamadas telefónicas por hora, número de estudiantes aprobados en un examen, número de intentos de conexión a Internet hasta obtener el acceso, suma de las caras que quedan hacia arriba como resultado del lanzamiento de 2 dados, etc.

Las variables aleatorias cuyos valores posibles son el resultado de mediciones, se llaman “continuas”. Se encuentran en cualquier parte dentro de un intervalo, por ejemplo: estatura de una persona, duración de un componente electrónico (tiempo), tiempo de atención en un cajero automático.

Variables Discretas.

Experimento aleatorio.

S {espacio de eventos asociado al experimento o espacio muestral}

Definición de variable aleatoria.

X = {x | x cumple cierta condición} (valores)

Conjunto de parejas

[Xi, P (Xi)]

Distribución de probabilidad para variable aleatoria discreta o función masa de probabilidad.

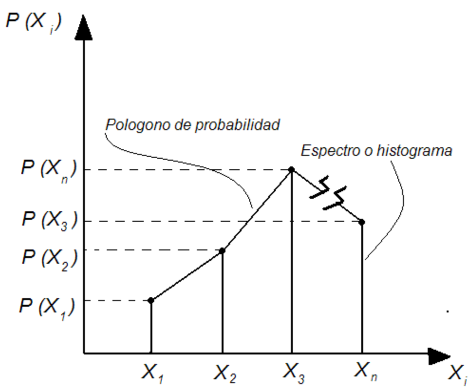
Sea X una variable aleatoria discreta cuyos valores son: X_1, X_2,… Xn y sus probabilidades correspondientes son P (X_1), P (X_2),… P (Xn). El conjunto de parejas [Xi, P (Xi)] donde i = 1,2,… n forma una distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta, cuyas propiedades son las siguientes:

1) $0 \leq P(Xi) \leq 1$
2) $\Sigma P(Xi) = 1$

Representación tabular:

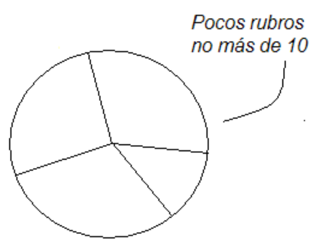
Xi	X1	X_2	…	Xn	Σ
P(Xi)	P(X1)	$P(X_2)$	…	P(Xn)	1

Gráfica:



Analítica.

P(X) = f(X)



EJEMPLO. Considere el experimento aleatorio del lanzamiento de 2 dados previamente identificados.

a) Obtenga el espacio de eventos asociado al experimento.
b) Defínase la V.A. X como la suma de las caras de los dados que quedan hacia arriba.
c) Obténgase la distribución de probabilidad correspondiente representándola en forma tabular, gráfica y analítica.

a)

$$S \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right.$$

b) X = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

c)

Xi	Eventos en S	P(Xi)
2	(1,1)	1/36
3	(1,2),(2,1)	2/36
4	(1,3)(3,1)(2,2)	3/36
5	(1,4)(4,1)(2,3)(3,2)	4/36
6	(1,5)(5,1)(2,4)(4,2)(3,3)	5/36
7	(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)	6/36
8	(2,6)(6,2)(3,5)(5,3)(4,4)	5/36
9	(5,4)(4,5)(6,3)(3,6)	4/36
10	(4,6)(6,4)(5,5)	3/36
11	(5,6)(6,5)	2/36
12	(6,6)	1/36
	Suma =	1.0

Forma analítica

$$P(X) = \left\{ \begin{array}{ll} (X-1)/36, & X = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ (13-X)/36 & X = 7, 8, 9, 10, 11, 12 \end{array} \right.$$

Ahora.

X = {x | x = diferencias de los valores de las caras en valor absoluto}

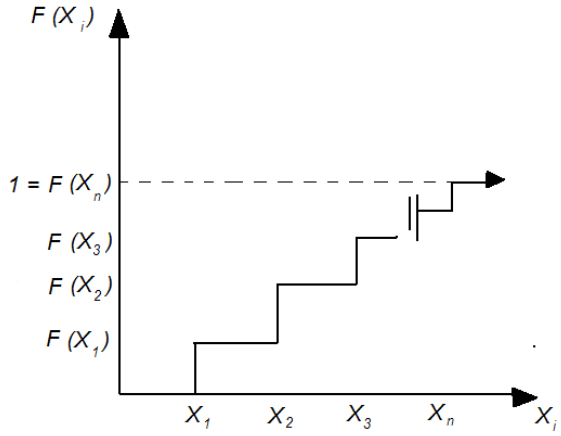
X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Distribución de Probabilidad Acumulada.

$$F(X_C) = \sum_{X_C} x_i$$

Xi	$P(X_i)$	$F(X_i)$
x_1	$P(x_1)$	$P(x_1)$
x_2	$P(x_2)$	$P(x_1)+ P(x_2)$
…		
x_n	$P(X_n)$	$P(x_1)+P(x_2)+\ldots +P(X_n) = 1$

Representación gráfica



Distribución de probabilidad para variable aleatoria continua o función densidad de probabilidad.

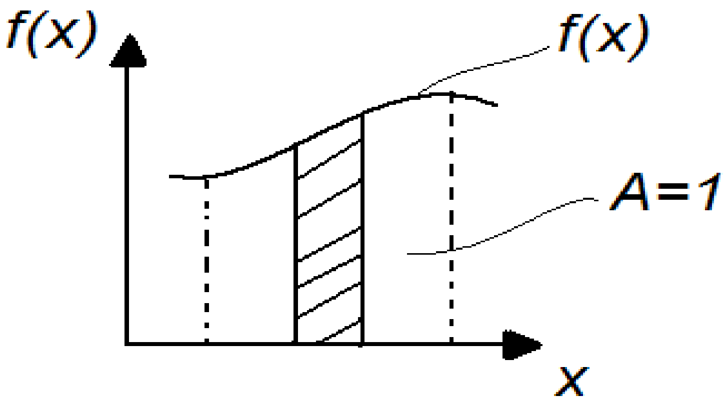
Sea X una variable aleatoria continua y f(x) una función de dicha variable cuyo dominio de definición está en el intervalo [a, b]. Para que f(x) defina una función densidad de probabilidad, debe tener las siguientes características:

1) $f(X) > 0$,

2) $\int_a^b f(X)\,dx = 1$

3) $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(X)\,dx \quad ; c > a,\ d < b,\ c < d$

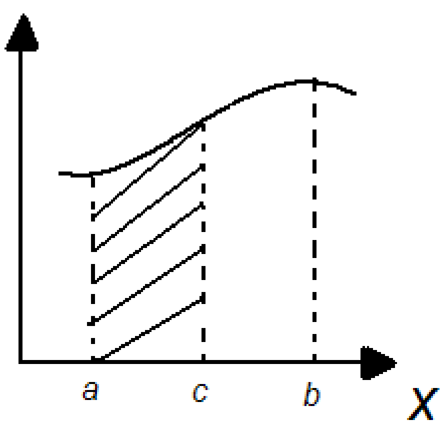
En forma gráfica:

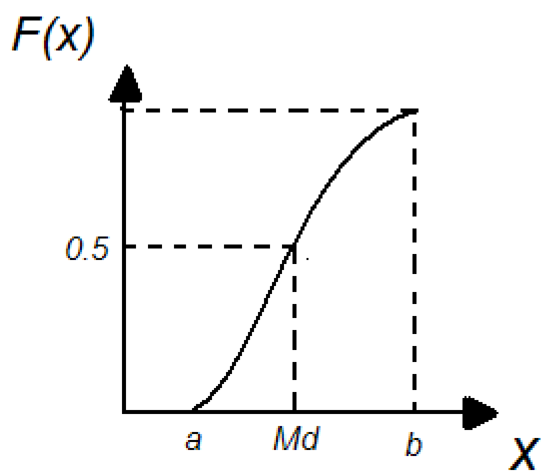


Función densidad acumulada.

$$F(X_c) = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$F(X) = \int_c^x f(t)\,dt$$





Propiedad: $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & c.o.c. \end{cases}$$

a) Obtener el valor de c para que f(x) defina una función densidad de probabilidad
b) Calcular $P(0.5 \leq X \leq 0.7)$.
c) Obtener la función de densidad acumulada F(x).
d) Calcular $P(0.5 \leq X \leq 0.7)$ empleando F(x).
e) Obtener la mediana x
f) Graficar f(x) y F(x).

a) $\int_0^1 c\,x^2\,dx = 1 \qquad c\,x^3/3\,|_0^1 = 1 \qquad c/3 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 3$

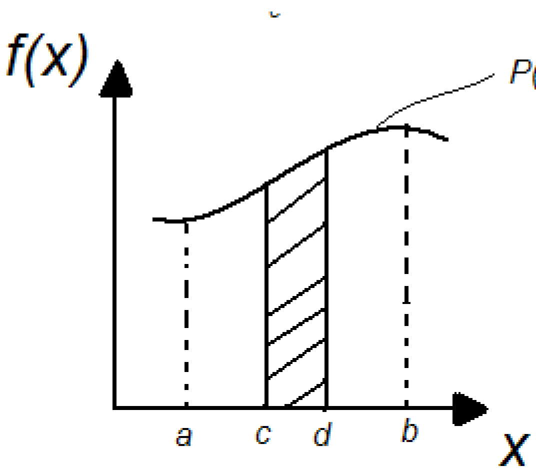
b) $f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & c.o.c. \end{cases}$

$P(0.5 \leq X \leq 0.7) = 3 \int x^2 dx$, de 0.5 a 0.7

$P(0.5 \leq X \leq 0.7) = 0.218$

c) $F(x) = 3\int t^2 dt$, de 0 a x $\quad \Rightarrow \quad F(x) = x^3$

d)



$P(0.5 \leq X \leq 0.7) = F(0.7) - F(0.5)$

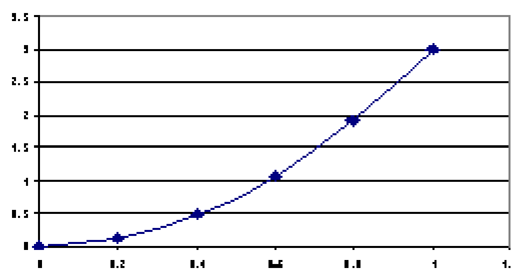
$P(0.5 \leq X \leq 0.7) = (0.7)^3 - (0.5)^3$

$P(0.5 \leq X \leq 0.7) = 0.218$

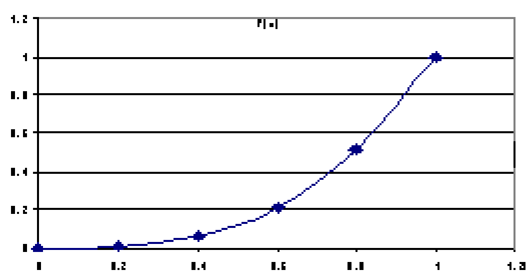
e) $F(x) = x^3 = 0.5$ $\quad\quad x = \sqrt[3]{(0.5)} = 0.7937$ Mediana

f)

x	f(x)
0	0
0.2	0.12
0.4	0.48
0.6	1.08
0.8	1.92
1	3



x	F(x)
0	0
0.2	0.008
0.4	0.064
0.6	0.216
0.8	0.512
1	1



ESPERANZA MATEMÁTICA.

Sea X una variable aleatoria discreta o continua que define una distribución de probabilidad y sea h(x) una función de dicha variable aleatoria.

Se define como esperanza matemática de h(x) a:

-Caso discreto:

$E[h(x)] = \sum h(x) P(x)$

Propiedades caso discreto.

1) $E[k] = k \quad k \in \mathbb{R}$

2) $E[kh(x)] = k\,E[h(x)]$

3) $E[h_1(x) \pm h_2(x)] = E[h_1(x)] \pm E[h_2(x)]$.

Generalización:

$E[k_1h_1(x) \pm k_2h_2(x) \pm \ldots \pm kn\,hn(x)]$

$= E[k_1h_1(x)] \pm E[k_2h_2(x)] \pm \ldots \pm E[kn\,hn(x)]$.

-Caso continuo:

$E[h(x)] = \int h(x)\,f(x)\,dx$

Propiedades caso continuo.

1) $E[k] = k. \quad k \in \mathbb{R}$

2) $E[kh(x)] = k\,E[h(x)]$

3) $E[h_1(x) \pm h_2(x)] = E[h_1(x)] \pm E[h_2(x)]$.

Generalización:

$E[k_1h_1(x) \pm k_2h_2(x) \pm \ldots \pm kn\,hn(x)]$

$= E[k_1h_1(x)] \pm E[k_2h_2(x)] \pm \ldots \pm E[kn\,hn(x)]$.

Ejemplo:

Sea X una variable aleatoria continua cuya función densidad de probabilidad está dada por:

Sea $f(x) = \begin{cases} Cx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$

a) Obtenga el valor de C para que efectivamente f(x) defina una función densidad de probabilidad.
b) Obtenga la media o valor esperado.
c) La varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación.
d) La mediana Md.

a) $\mu x = E[x] = 3\int_0^1 x\, x^2\, dx = 3\int_0^1 x^3\, dx = (3/4)\, x^4|_0^1 = 0.75$
b) $(\sigma x)^2 = E\,[x^2] - E^2\,[x]$

$E\,[x^2] = 3\int_0^1 x^4\, dx = (3/5)\, x^5|_0^1 = 0.6$

$(\sigma x)^2 = 0.6 - (0.75)^2 = 0.0375$ varianza

$\sigma x = \sqrt{(0.0375)} = 0.1936$ desviación estándar

C.V. $= \sigma x / \mu x = 0.1936/0.75 = 0.2582 = 25.82\%$ C.V.

c)

$F(x) = 3\int t^2 dt$, de 0 a x $\Rightarrow$ $F(x)= x^3$

Mediana será el valor de x cuando F(x) = 0.5

$x^3 = 0.5$ $x = 0.7937 = Md$

Momentos de Orden "n" con respecto al Origen.

Sea X una V.A. discreta o continua que define una distribución de probabilidad y sea $h(x) = x^n$; n entero positivo.

El momento de orden n con respecto al origen se define como:

Caso discreto.

$\mu'_n = E[x^n] = \Sigma\, x^n\, P(x)$

Caso continuo.

$\mu'_n = E[x^n] = \int_a^b x^n f(x)dx$

para n = 1

Caso discreto $\mu'_1 = E[x] = \Sigma\, x\, P(x) = \mu_x$ media o valor esperado

caso continuo $\mu'_1 = E[x] = \int_a^b x f(x)dx = \mu_x$ media o valor esperado

para n=2

Caso discreto $\mu'_2 = E[x^2] = \Sigma\, x^2\, P(x)$ = momento de orden 2 con respecto al origen

Caso continuo $\mu'_2 = E[x^2] = \int_a^b x^2 f(x)dx$ = momento de orden 2 con respecto al origen

Momentos de Orden “n” con respecto a la media.

Sea X una variable aleatoria discreta o continua que define una distribución de probabilidad y sea $h(x) = (x-\mu_x)^n$ n es un número entero y positivo

El momento de orden n con respecto a la media se define.

Caso discreto. Caso continuo

$\mu_n = E[(x-\mu_x)]^n = \Sigma(x-\mu_x)^n P(x)$ $\mu_n = E[(x-\mu_x)]^n = \int_a^b (x-\mu_x)^n \; f(x)dx$

para n = 1

$\mu_1 = E[(x-\mu_x)] = \Sigma(x-\mu_x) P(x)$

$= \Sigma\, x\, P(x) - \mu_x\, \Sigma\, P(x)$ $\mu_1 = 0$

para n = 2

$\mu_2 = E[(x-\mu_x)]^2 = \Sigma(x-\mu_x)^2 P(x)$ $\mu_2 = E[(x-\mu_x)]^2 = \int_a^b (x-\mu_x)^2 \; f(x)dx$

$= \sigma_x^2$ = varianza

para n = 3

$\mu_3 = E[(x-\mu_x)]^3 = \Sigma(x-\mu_x)^3 P(x)$ $\mu_3 = \Sigma(x-\mu_x)^3 = \int_a^b (x-\mu_x)^3 f(x)dx$

para n = 4

μ_4 = E[(x-μ_x)]^4=Σ(x-μ_x)^4 P(x) μ_4= Σ(x-μ_x)^4 = $\int_a^b (x-\mu_x)^4 \; f(x)dx$

EJEMPLO: CASO DISCRETO.

A partir de la distribución de probabilidad para la variable aleatoria

X = {x/x, suma de las caras} en el lanzamiento de los dados.

a) obtener la media o valor esperado, la varianza y la desviación estándar

Xi	P(Xi)	Xi P(Xi)	Xi^2 P(Xi)
2	1/36	2/36	4/36
3	2/36	6/36	18/36
4	3/36	12/36	48/36
5	4/36	20/36	100/36
6	5/36	30/36	180/36
7	6/36	42/36	294/36
8	5/36	40/36	320/36
9	4/36	36/36	324/36
10	3/36	30/36	300/36
11	2/36	22/36	242/36
12	1/36	12/36	144/36
Σ	1	7	54.83

Forma simplificada para el cálculo.

σ^2= E[x^2] - E^2[x]

Dónde:

E [x^2] = Σ x^2 P(x) caso discreto.

E[x^2] = ∫ x^2 P(x) dx caso continuo.

$\mu x = E[x] = 7$

$\sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$

$\sigma^2 = 54.833 - 7^2$

$\sigma^2 = 5.83$ varianza

$\sigma = \sqrt{5.83} = 2.4152$ desviación estándar

$CV = 2.4152/7 = 34.5\ \%$

Ejemplo:

Sea X una V.A. continua cuya función densidad de probabilidad está dada por: $f(x) = 3x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$ y 0 para cualquier otro caso.

a) Obtenga la media o valor esperado.
b) La varianza, desviación estándar y el coeficiente de variación.
c) La mediana Md

a)

$\mu x = E[x] = \int x\, x^2\, dx$ (de 0 a 1)

$\mu x = 0.75$

b)

$(\sigma x)^2 = E[x^2] - E^2[x]$

$E[x^2] = 3\int x^4\, dx$ (de 0 a 1) $= (3/5)x^5$ (de 0 a 1) $= 0.6$

$(\sigma x)^2 = 0.6 - (0.75)^2 = 0.0375$

$\sigma x = 0.1936 \quad CV = \sigma x/\mu x = 0.1936/0.75 = 25.82\%$

c)

$F(x) = 3\int t^2\, dt$ (de 0 a x) $= x^3$

La mediana será el valor de x cuando $F(x) = 0.5$

$x^3 = 0.5$; $x = 0.8$

Resolución del 2° examen:

1.- ¿Cuál de las siguientes es una afirmación correcta acerca de una probabilidad?

A) Puede ser entre 0 y 1.

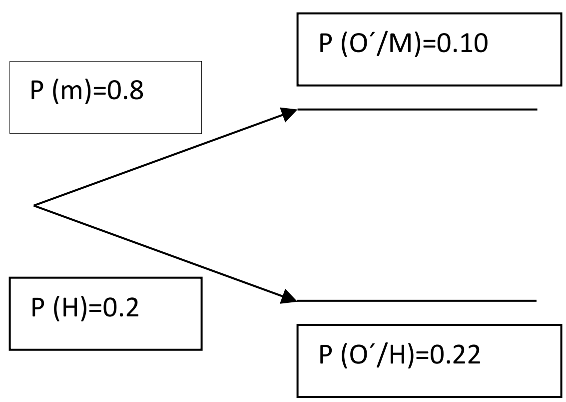
2.- Un experimento es:

D) El acto de realizar una medición u observación de alguna actividad.

3.- Los eventos son independientes sí:

D) La probabilidad de ocurrencia de un evento, no afecta la probabilidad de que otro suceda.

4.- En un programa de capacitación administrativa, 80% de los capacitados son mujeres, 20% son hombres, 90% de las mujeres y 78% de los hombres fueron a la universidad. Se selecciona un capacitado al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea una persona que no fue a la universidad?



$$\boxed{P(U' \cap M) = 0.08 \rightarrow B)}$$

5.- En cierta Universidad para varones, 5% de los estudiantes del último año eran miembros del equipo de fútbol, 10% de la clase eran vegetarianos y 10% de los vegetarianos eran miembros del equipo de fútbol. Si se selecciona al azar un estudiante del último año, ¿cuál es la probabilidad de que sea vegetariano o haya pertenecido al equipo de fútbol como vegetariano?

A)

$$P(F)=0.05$$
$$P(V)=0.10$$
$$P(F\cap V)=(0.10)(0.05)=0.005$$
$$P(F\cup V)=P(F)+P(V)-P(F\cap V)=0.05+0.10-0.005=0.145$$

6.- Se extraen dos bolas sucesivamente de una caja que contiene 10 bolas rojas, 30 blancas, 20 azules y 15 naranjas, remplazando la bola extraída después de cada extracción. Hallar la probabilidad de que la primera sea blanca pero la segunda no.

10 R   30B   20A   15N

C)

$$P(B_1\cap B_2^1)=\tfrac{30}{75}*\tfrac{45}{75}=\tfrac{6}{25}$$

7. En la disposición de una tarjeta de circuitos impresos para un producto electrónico hay 12 sitios diferentes donde pueden colocarse chips, si van a colocarse cinco tipos diferentes de chips en la tarjeta, ¿Cuántas disposiciones diferentes son posibles?

$$P_{12}^{5}=\frac{12!}{(12-5)!}=95090\rightarrow D)$$

8.- La probabilidad de que el pedido de un cliente no se envié a tiempo es 0.05. Un cliente dado hace tres pedidos, con la suficiente separación en el tiempo como para considerarlos eventos independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un pedido no se envié a tiempo?

$$\begin{array}{l} TTT \\ TTT' \\ TT'T \\ T'TT \\ T'T'T \\ T'TT' \\ TT'T' \\ T'T'T' \end{array} \quad 3(0.95)(0.95)(0.05)=0.1354\rightarrow B)$$

9.- Un club de inversionistas tiene una membresía de cuatro mujeres y seis hombres, se va a formar un comité de investigación de tres miembros, ¿De cuántas maneras debe conformarse si debe haber dos mujeres y un hombre en un comité?

$$\binom{4}{2}\binom{6}{1} = 36 \rightarrow B$$

10.- Dados $\mathrm{P(A)=0.03,\ P(B)=0.50\ y\ P(A \cap B)=0.15}$, verifique que (B/A’) es igual a:

$$P(A) = 0.30$$
$$P(B) = 0.50$$
$$P(A \cap B) = 0.15$$
$$P(B') = 0.50$$
$$P(A/B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{0.15}{0.50} = 0.3 = P(A) \rightarrow C)$$
$$P(A \cap B') = 0.30 - 0.15 = 0.15$$