MÉTODO DEL PUNTO FIJO (APROXIMACIONES SUCESIVAS)

Sea la ecuación algebraica o trascendente escrita en forma general:

$f(x) = 0$ (1)

$f(x) + x = x$ (2)

$g(x) = f(x) + x$ (3)

Sustituyendo (3) en (2)

$x = g(x)$ (4)

Puede observarse que cualquier ecuación puede representarse en la forma anterior siguiendo el procedimiento mostrado.

Si $x = a$ es una raíz de la ecuación, implica que

$f(a) = 0$

O bien sustituyendo en la expresión (4)

$a = g(a)$ (5)

El método de aproximaciones sucesivas consiste en sustituir un valor inicial (x_0) aproximado a la raíz, en el segundo miembro de la expresión (4). Si el valor inicial proporcionado es la raíz, se deberá cumplir la expresión (5), esto es:

$x_0 = f(x_0)$

Como es improbable que esto ocurra, ya que el valor inicial proporcionado x_0 será un valor aproximado a la raíz, entonces:

$x_0 \neq g(x_0)$ o bien $x_1 = g(x_0)$

Donde x_1 será el nuevo valor aproximado a la raíz *a.* Sustituyendo x_1 en el segundo miembro de la expresión (4) se obtendrá una siguiente aproximación a la raíz.

$x_2 = g(x_1)$

Procediendo reiteradamente en esta forma, la n-ésima aproximación es:

$x_n = g(x_{n-1})$ … (6)

Donde $n = 1, 2, 3, …$

CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Para hacer un análisis de la convergencia de este método, partiremos de las expresiones (5) y (6). Restándolas miembro a miembro se obtiene:

$a - x_n = g(a) - g(x_{n-1})$

Multiplicando en segundo miembro de la ecuación por:

$$\frac{a - x_{n-1}}{a - x_{n-1}}$$

$$a - x_n = \left[\frac{g(a) - g(x_{n-1})}{a - x_{n-1}}\right](a - x_{n-1})$$

Aplicando el *teorema del valor medio del cálculo diferencial*:

$$a - x_n = g'(x)(a - x_{n-1}); \quad x_{n-1} < x < a$$

Despejando $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{a - x_n}{a - x_{n-1}}; \quad x_{n-1} < x < a \quad \dots (7)$$

Sustituyendo x por k, donde k será una iteración cualquiera, comprendida entre la primera y la enésima, y analizando el segundo miembro de la ecuación puede observarse que para que el cociente sea menor que la unidad, debe cumplirse lo siguiente:

$$|a - x_k| < |a - x_{k-1}| \quad \dots (8)$$

Esto quiere decir que la diferencia en valor absoluto entre el valor de la raíz a y el último valor aproximado calculado x_k, es menor que la diferencia en valor absoluto entre el valor de la raíz a y el último valor aproximado calculado x_{k-1}, por lo tanto, se puede afirmar que en la k-ésima iteración el método se está aproximando a la raíz, o está siendo convergente a la raíz.

La expresión (8) se puede escribir como:

$$\left|\frac{a - x_k}{a - x_{k-1}}\right| < 1\,; \qquad x_{k-1} < x < a$$

Por último, sustituyendo en la expresión (7):

$$|g'(x)| < 1 \qquad \dots (9)$$

$$x_{k-1} < x < a$$

El método será divergente cuando:

$$|a - x_k| > |a - x_{k-1}|$$

Esto implica que el último valor calculado x_k está más lejano de la raíz a que la penúltima aproximación x_{k-1}.

Cuando suceda $|a - x_k| = |a - x_{k-1}|$ implicará una condición de oscilación, ya que la penúltima aproximación x_{k-1} es igual a la última x_k, esto quiere decir que el método no avanza hacia la raíz, aunque en este caso tampoco se aleja. Para fines prácticos, se considerará este caso divergente debido a que el método no se acerca a la raíz.