Método Gauss Seidel

Este es uno de los métodos más interesantes del análisis numérico y particularmente útil ya que nos **permite encontrar la solución de un sistema de "n" ecuaciones con "n" incógnitas.**

Para comenzar es preciso mencionar que es un método iterativo, es decir que debe aplicarse recursivamente hasta encontrar una solución adecuada o con un error considerablemente pequeño.

En cada iteración obtenemos una solución posible del sistema con un error determinado, a medida que aplicamos nuevamente el método, la solución puede ser más precisa, entonces se dice que el sistema converge, pero si al aplicar el método reiteradas veces la solución tiene un error (ya explicaremos como se calcula este error) cada vez mayor se dice que el sistema no converge y no se puede resolver el sistema de ecuaciones por este método.

Teniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 &+ a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Despejamos x_1 de la ecuación 1, x_2 de la ecuación 2, … , x_n de la ecuación n, quedando:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{11}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Desde la fórmula anterior resultan las fórmulas que se deberán ir aplicando en las diferentes iteraciones. Para comenzar a aplicar el método debemos asignar un valor arbitrario a las variables $x_2,\ldots x_n$ con el fin de obtener x_1. Lo más conveniente en este caso es que los valores comiencen en cero, lo cual nos facilitaría el trabajo ya que se reduce el cálculo de las primeras soluciones, entonces de esto resulta que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Ahora despejamos x_2 de la ecuación 2 y reemplazamos a x_1 por el valor obtenido en la ecuación anterior. De esto nos queda:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right)}{a_{22}}$$

Una vez que tenemos x_2, despejamos x_3 de la ecuación 3 y así sucesivamente con las n ecuaciones, cada vez asignando el valor de las x_1, x_2, … x_{n-1} obtenido en el paso anterior.

Cuando hemos despejado las x_n, tenemos lo que se conoce como primera solución o solución de la primera iteración:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

Con los nuevos valores de x_1, x_2, …, x_n aplicamos los mismos pasos anteriores, pero con los nuevos valores de las x_n, de esta manera conseguimos una segunda solución:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 \\ x_2 &= \beta_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \beta_n \end{aligned}$$

Al tener esta segunda solución estamos en condiciones de calcular el error que se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \left|\epsilon_{a,1}\right| &= \left|\frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1} \times 100\%\right| \\ \left|\epsilon_{a,2}\right| &= \left|\frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2} \times 100\%\right| \\ &\vdots \\ \left|\epsilon_{a,n}\right| &= \left|\frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_n} \times 100\%\right| \end{aligned}$$

Así, repetimos el método tantas veces hasta que el error sea muy pequeño o los suficientemente aceptable.

Ahora solo queda mencionar que para que un sistema sea convergente se debe cumplir que la matriz de coeficientes sea diagonalmente dominante, y para ello se debe verificar la siguiente expresión:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right|$$

$$i = 1,2,\cdots,n$$

Si no se cumple esa condición, se puede permutar las filas de la matriz, con el fin de poder convertirla en una diagonalmente dominante.

Este método es prácticamente idéntico al de Jacob, la única diferencia estriba en que el método de Gauss-Seidel se acerca más rápido a la solución cuando el método converge,

debido a que una vez que se calcula la componente $x_i^{(k+1)}$ la utiliza inmediatamente en la misma iteración, esto es:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}$$

...

...

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

El criterio de convergencia de este método es el mismo que el de Jacobi.

Ejemplo (el que se resolvió por el método de Jacobi)

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= 22 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 23 \end{aligned}$$

Las ecuaciones se reducen a:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{6}(22 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \qquad (a)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(30 + x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}) \qquad (b)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(23 - x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)}) \qquad (c)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Tomando el mismo vector inicial del ejemplo anterior y sustituyendo $k = 0$ en las ecuaciones (a), (b) y (c):

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}(22 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) \qquad (a)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8}(30 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)}) \qquad (b)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(23 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) \qquad (c)$$

Sustituyendo valores:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2\left(\frac{30}{8}\right) - \frac{23}{6}\right) = 1.778 \qquad (a)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8}\left(30 + 1.778 - 2\left(\frac{23}{6}\right)\right) = 3.014 \qquad (b)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}\left(23 - 1.778 + 3.014\right) = 4.039 \qquad (c)$$

Se obtiene:

$$\bar{x}^{(1)} = [1.778 \quad 3.014 \quad 4.039]^T$$

Procediendo reiteradamente en forma semejante, las siguientes iteraciones resultan:

$$k = 1; \quad \bar{x}^{(2)} = [1.989 \quad 2.989 \quad 4.000]^T$$
$$k = 2; \quad \bar{x}^{(3)} = [2.004 \quad 3.001 \quad 4.000]^T$$
$$k = 3; \quad \bar{x}^{(4)} = [2.000 \quad 3.000 \quad 4.000]^T$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x_1 = 2.000$$
$$x_2 = 3.000$$
$$x_3 = 4.000$$

Que es la misma solución que proporciona el método de Jacobi, con la ventaja que con el método de Gauss-Seidel se obtiene en tres iteraciones menos.