MÉTODO DE KRYLOV.

Este método se basa en el teorema de Cayley – Hamilton que establece: *Toda matriz A de orden n x n verifica su propia ecuación característica.*

$$\mathbf{P(A)} = \mathbf{0}$$

Sea: la ecuación característica de la matriz A de orden n.

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (1)$$

Dado que el orden de A es n, esta ecuación es de grado n y entonces $a_0 \neq 0$, dividiendo (1) entre a_0 se obtiene:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \quad (2)$$

$$\text{donde: } b_i = \frac{a_i}{a_0}$$

aplicando el teorema de Cayley – Hamilton:

$$\mathbf{A}^n + b_1\mathbf{A}^{n-1} + b_2\mathbf{A}^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\mathbf{A} + b_n\mathbf{I} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Los términos de la ecuación anterior son matrices de orden n x n y la suma de ellas forma un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, cuyas incógnitas son: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Para sumar vectores en lugar de matrices. Se multiplicará por un vector cualquiera $\bar{y}$, compatible con $\mathbf{A}$ y diferente de cero, con lo cual:

$$\mathbf{A}^n\bar{y} + b_1\mathbf{A}^{n-1}\bar{y} + b_2\mathbf{A}^{n-2}\bar{y} + \ldots + b_{n-1}\mathbf{A}\bar{y} + b_n\bar{y} = \mathbf{0} \qquad (4)$$

Al resolver este sistema se obtienen los coeficientes de la ecuación característica, los cuales se sustituyen en la expresión (2).

Ejemplo:

Obtener la ecuación característica de la siguiente matriz utilizando el método de Krylov.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica está dada por la expresión (2), en este caso para n = 3 que corresponde al orden del sistema, esto es:

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0 \qquad \text{(a)}$$

y el sistema de ecuaciones para conocer los valores de b_1, b_2, b_3, se obtiene de la expresión (4):

$$\mathbf{A}^3\overline{y} + b_1\mathbf{A}^2\overline{y} + b_2\mathbf{A}\overline{y} + b_3\overline{y} = \mathbf{0} \quad \text{(b)}$$

utilizando el vector:

$$\overline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$\mathbf{A\overline{y}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^2\overline{y}} = \mathbf{A(A\overline{y})} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^3\overline{y}} = \mathbf{A(A^2\overline{y})} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (b):

$$\begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Simplificando se llega al sistema:

$$\begin{aligned} 5b_1 + 3b_2 + 3b_3 &= 11 \\ -4b_1 - 2b_2 &= 6 \\ -b_2 &= 5 \end{aligned}$$

resolviéndolo:

$$b_1 = 1;\ b_2 = -5;\ b_3 = 7$$

Por último, sustituyendo en (a) se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0$$