Interpolación polinómica de Lagrange

El polinomio de Lagrange, llamado así en honor a Joseph Louis de Lagrange, es el polinomio que interpola un conjunto de puntos dados. Fue descubierto por Edgard Waring en 1779 y redescubierto mas tarde por Leonhard Euler en 1783.

Definición

Dado un conjunto de *n*+1 puntos:

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ para $j = 0,1,...,n$

Donde todos los x_j se consideran distintos, el polinomio interpolador en la forma de Lagrange, es la combinación lineal:

$$P(x) == \sum_{j=o}^{n} l_j(x) y_j$$

Donde $l_j(x)$ se denominan bases polinómicas de Lagrange

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Es decir:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_j$$

Fórmula de interpolación de Lagrange (polinomio de Lagrange)

Si se presenta una función tabulada en la forma:

x	y=f(x)
x_0	y_0
$x_1=x_0+h_0$	y_1
$x_2=x_1+h_1$	y_2
---------- ----------	------- -------
$x_n=x_{n-1}+h_{n-1}$	y_n

Donde

$h_0 = x_1-x_0$
$h_1 = x_2-x_1$

$h_{n-1} = x_n-x_{n-1}$

y no necesariamente se debe cumplir que:

$$h_0 = h_1 = \ldots = h_n$$

entonces, el polinomio de grado n que pasa por los n + 1 puntos es:

$$f(x) = y = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

$$\boxed{\begin{aligned} y = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ \ldots\ (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)\ \ldots\ (x_0 - x_n)}\, y_0 \, + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ \ldots\ (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ \ldots\ (x_1 - x_n)}\, y_1 \, + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots\ (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ \ldots\ (x_2 - x_n)}\, y_2 \, + \\ & \quad \vdots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ \ldots\ (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ \ldots\ (x_n - x_{n-1})}\, y_n \end{aligned}} \quad \ldots \ (17)$$

Esta expresión recibe el nombre de *fórmula de interpolación de Lagrange* y es aplicable para cualquier valor de x cuando la función F(x) se encuentra tabulada según la tabla V.3.