1) En una cisterna se almacenó agua durante 25 minutos con un gasto de 120 lts/min. Calcule:

   a) los litros almacenados si el reloj solo marca minutos y el medidor de gasto solo tiene marcas cada 10 lts/min y

   b) los errores máximos cometidos, tanto absoluto como relativo.

2) Los siguientes números provienen de un computador decimal con una mantisa normalizada de 4 dígitos:

   $a = 0.2115 \times 10^{-3}$; $b = 0.2583 \times 10^{1}$; $c = 0.4523 \times 10^{4}$

   Realice las siguientes operaciones e indique el error en el resultado, suponiendo redondeo simétrico:

   a) a + b + c ; b) (c) (a) / b ; c) (c) / (b)

3) Obtenga la raíz positiva más cercana al origen de la función $f(x) = cos^2 x - 2\ sen\ x$ con tres cifras significativas exactas.

4) Encontrar la raíz más cercana al origen de la ecuación: $e^{-(x-1)}\ sen(x) = -10$, con tres cifras significativas exactas.

5) Un fabricante de muebles quiere saber cuántas mesas, sillas y sillones se pueden producir si cuenta con $415m^2$ de tapiz, $370\, litros$ de barniz y $535\, pt$ (pie tablón) de madera, además se sabe que se necesitan $12m^2$ de tapiz, $6\, litros$ de barniz y $10\, pt$ de madera para elaborar una mesa, de la misma manera se requieren 13, 4 y 9 unidades de tapiz, barniz y madera respectivamente para una silla y 4, 10 y 12 unidades para un sillón. Si se duplican las disponibilidades de los insumos, ¿doblará la cantidad de producción?, utilice un método de descomposición LU para la solución.

6) Durante los días 15, 16 y 17 de un mes cualquiera, un ingeniero constructor solicita al gerente de una pre mezcladora los siguientes volúmenes de concreto: 80, 50 y 65 m^3 respectivamente, en una jornada de 8 horas. Con el fin de satisfacer el pedido el gerente establece el número de viajes de 3 camiones revolvedores (A, B y C) que tiene disponible para esos días y por facilidad elabora la siguiente tabla:

Unidad	Día 15	Día 16	Día 17
A	6	3	4
B	4	No circula	5
C	3	5	2

Determinar la capacidad en m^3 de cada una de las revolvedoras A, B y C. Resuelva el sistema de ecuaciones generado aplicando el método de Gauss-Seidel, con tres dígitos significativos de precisión.

7 Las coordenadas (en metros) de una alberca vista de planta de 1.5 metros de profundidad son (10,8), (13,7), (11,16), (9,15), (7,13). Calcular el volumen de la alberca con el mínimo error.

8 Utilizando la fórmula de Simpson, resuelva la siguiente integral definida, con n = 8

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

9) Dada la función tabular:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$f(x)$	36.75	42.1875	41.25	34.125	22.50	9.5625	0.00	0.00	17.25	60.9375	141.75

Determine el valor de la función para: x=1.27 y x=4.3. Utilice interpolación con incrementos constantes.

10 Utilizando el método de Euler modificado (Euler Gauss) con redondeo simétrico de 4 decimales, al aproximar la solución de la ecuación diferencial $y' = x - y$, con la condición inicial $y(0) = 1$ y $h = 0.02$, el resultado para $y(0.04)$ es:

11 Por el método de diferencias finitas, encuentre la solución a la ecuación diferencial $y'' - 2y + 5 = 0$ con las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(1) = 2$. Considere $h = 0.2$

12 Clasifique las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, según corresponda en hiperbólica, elíptica y parabólica:

a) Ecuación de Laplace (en estado estable con dos dimensiones espaciales).

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$$

b) Ecuación de conducción del calor (variable de tiempo con una dimensión espacial).

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{k}\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

c) Ecuación de onda (variable de tiempo con una dimensión espacial).

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

13 Para la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

a) De acuerdo con la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, ¿qué tipo de ecuación es?

b) Plantear la solución por diferencias finitas. (No resuelva la ecuación)

1) En una cisterna se almacenó agua durante 25 minutos con un gasto de 120 l/min. Calcule:

a) los litros almacenados si el reloj solo marca minutos y el medidor de gasto solo tiene marcas cada 10 l/min y

b) los errores máximos cometidos, tanto absoluto como relativo.

Solución:

$$\boldsymbol{V = Qt = (120)(25) = 3000 lts}$$

$E_Q = \pm 5\, {}^{lts}/_{min}$

$E_t = \pm 0.5 min$

considerando positivos los errores

$E_v = E_Q\, t + E_t\, Q = (5)(25) + (0.5)(120)$

$E_v = 185 lts$

$E_v = \pm 185 lts$ error absoluto máximo

$e_{rel} = \frac{|185|}{3000}$ x $100 = 6.167\%$ error relativo máximo

2) Los siguientes números provienen de un computador decimal con una mantisa normalizada de 4 dígitos:

$a = 0.2115 \times 10^{-3}$; $b = 0.2583 \times 10^{1}$; $c = 0.4523 \times 10^{4}$

Realice las siguientes operaciones e indique el error en el resultado, suponiendo redondeo simétrico:

a) a + b + c ; b) (c) (a) / b ; c) (c) / (b)

Solución:

a) $a + b + c = 0.4526 \times 10^{4}$

con todos los dígitos de la calculadora: a + b + c = 4525.5832115

$$\boldsymbol{E_a = |4525.5832115 - 4526| = 0.4167885}$$

$$e_r = \left|\frac{0.4167885}{4525.5832115}\right| \text{ x } 100$$

$$\boldsymbol{e_r = 9.2 \text{ x } 10^{-3}} \ \%$$

b) (c) (a) / b = 3.7035

con todos los dígitos de la calculadora: (c) (a) / b = 3.703501742

$$\boldsymbol{E_a = |3.703501742 - 3.7035| = 1.742 \text{ x } 10^{-6}}$$

$$\mathrm{e_r} = \left|\frac{1.742 \text{ x } 10^{-6}}{3.703501742}\right| \text{ x } 100$$

$$\boldsymbol{e_r = 4.7 \text{ x } 10^{-5}} \ \%$$

c) (c) / (b) = 1751

con todos los dígitos de la calculadora: (c) / (b) = 1751.064654

$$\boldsymbol{E_a = |1751.0646535 - 1751| = 0.0646535}$$

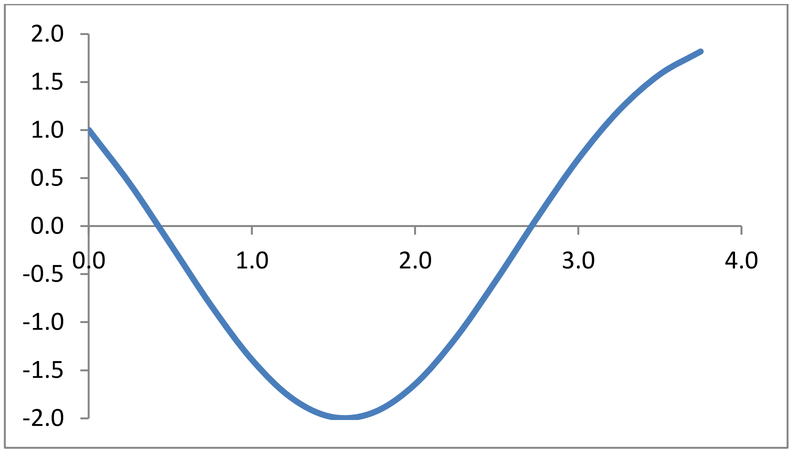
$$\mathrm{e_r} = \left|\frac{0.064654}{1751.0646535}\right| \text{ x } 100$$

$$\boldsymbol{e_r = 3.69 \text{ x } 10^{-3}} \ \%$$

3) Obtenga la raíz positiva más cercana al origen de la función $f(x) = cos^2x - 2\ sen\ x$ con tres cifras significativas exactas.

Solución:

La grafica de la función es:



$f(x) = cos^2x - 2\ sen\ x$

$f'(x) = -2sen(x)\cos(x) - 2\cos(x)$

$f''(x) = -2cos^2x + 2sen^2x + 2sen(x)$

se verifica el criterio de convergencia

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}\right| < 1$$

de la grafica $x_0 = 0.5$

convergencia: $|-0.026| < 1$ por tanto se puede utilizar newton-raphson

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{-0.18870}{-2.59663} = 0.427329$$

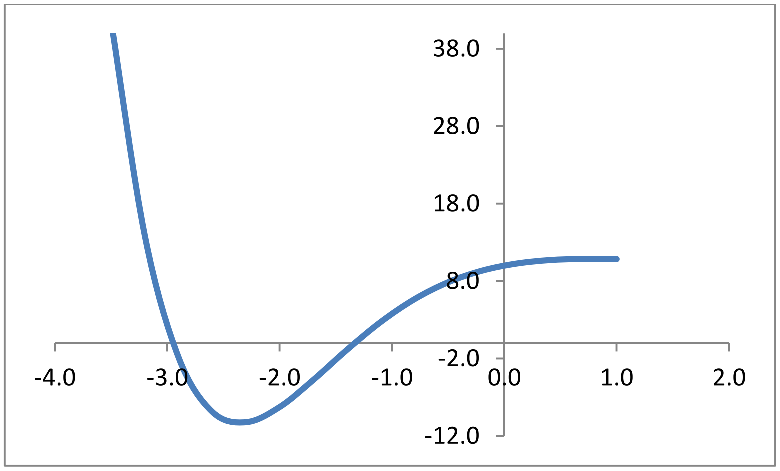
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.427329 - \frac{-0.00064}{-2.57449} = 0.427079$$

Raíz es: $\mathbf{0.4271}$

4) Encontrar la raíz más cercana al origen de la ecuación: $e^{-(x-1)}\, sen(x) = -10$, con tres cifras significativas exactas.

Solución:

La grafica de la función es:



$f(x) = e^{(1-x)}\, sen(x) + 10$

$f'(x) = e^{(1-x)}\left(\cos(x) - sen(x)\right)$

verificar el criterio de convergencia

de la grafica $x_0 = -1.5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1.5 - \frac{-2.15198}{13.01373} = -1.334638$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1.334638 - \frac{-0.03912}{12.45502} = -1.331497$$

Raíz es: -1.331

5) Un fabricante de muebles quiere saber cuántas mesas, sillas y sillones se pueden producir si cuenta con $415m^2$ de tapiz, $370\,litros$ de barniz y $535\,pt$ (pie tablón) de madera, además se sabe que se necesitan $12m^2$ de tapiz, $6\,litros$ de barniz y $10\,pt$ de madera para elaborar una mesa, de la misma manera se requieren 13, 4 y 9 unidades de tapiz, barniz y madera respectivamente para una silla y 4, 10 y 12 unidades para un sillón. Si se duplican las disponibilidades de los insumos, ¿doblará la cantidad de producción?, utilice un método de descomposición LU para la solución.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \\ 10 & 9 & 12 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 415 \\ 370 \\ 535 \end{bmatrix}, \text{ si se duplican } b_2 = \begin{bmatrix} 830 \\ 740 \\ 1070 \end{bmatrix}$$

x_1: número de mesas producidas.

x_2: número de sillas producidas.

x_3: número de sillones producidas.

Por Crout:

$$L = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 6 & -2.5 & 0 \\ 10 & -1.83333 & 2.8 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1.08333 & 0.33333 \\ 0 & 1 & -3.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con b_1 se obtiene $\overline{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 25 \end{bmatrix}$ y con b_2 se obtiene $\overline{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$

Por Doolittle:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.83333 & 0.73333 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 4 \\ 0 & -2.5 & 8 \\ 0 & 0 & 2.80001 \end{bmatrix}$$

con b_1 se obtiene $\overline{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 25 \end{bmatrix}$ y con b_2 se obtiene $\overline{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$

por lo tanto: **se duplica la producción**

6) Durante los días 15, 16 y 17 de un mes cualquiera, un ingeniero constructor solicita al gerente de una pre mezcladora los siguientes volúmenes de concreto: 80, 50 y 65 m^3 respectivamente, en una jornada de 8 horas. Con el fin de satisfacer el pedido el gerente establece el número de viajes de 3 camiones revolvedores (A, B y C) que tiene disponible para esos días y por facilidad elabora la siguiente tabla:

Unidad	Día 15	Día 16	Día 17
A	6	3	4
B	4	No circula	5
C	3	5	2

Determinar la capacidad en m^3 de cada una de las revolvedoras A, B y C. Resuelva el sistema de ecuaciones generado aplicando el método de Gauss-Seidel, con tres dígitos significativos de precisión.

Solución:

$$\begin{array}{lllllll} 6A & + & 4B & + & 3C & = & 80 \\ 4A & + & 5B & + & 2C & = & 65 \\ 3A & & & + & 5C & = & 50 \end{array}$$

$$A^{k+1} = \frac{1}{6}[80 - 4B^k - 3C^k]$$

$$B^{k+1} = \frac{1}{5}[65 - 4A^{k+1} - 2C^k]$$

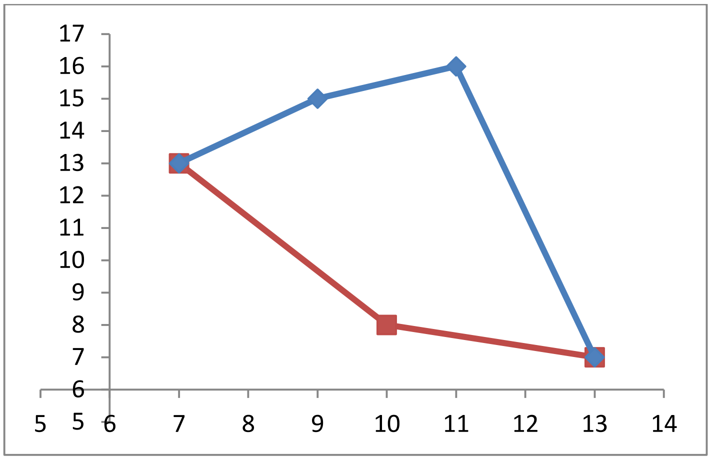
$$C^{k+1} = \frac{1}{5}[50 - 3A^{k+1}]$$

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{A} & = & \mathbf{7.14} \\ \boldsymbol{B} & = & \mathbf{5.00} \\ \boldsymbol{C} & = & \mathbf{5.72} \end{array}$$

7 Las coordenadas (en metros) de una alberca vista de planta de 1.5 metros de profundidad son (10,8), (13,7), (11,16), (9,15), (7,13). Calcular el volumen de la alberca con el mínimo error.

Solución:

La grafica de las coordenadas es:



Contorno superior

x	7	9	11	13
y	13	15	16	7

$$A_S = \left(\frac{3}{8}\right) 2 \left[13 + 7 + 3 \left(15 + 16 \right) \right] = 84.75$$

Contorno inferior

x	7	10	13
y	13	8	7

$$A_I = \left(\frac{1}{3}\right) 3 \left[13 + 7 + 4 \left(8 \right) \right] = 52$$

$$A_{Total} = 84.75 - 52 = 32.75$$

$$V = 32.75 \left(1.5 \right) = 49.125m^3$$

8 Utilizando la fórmula de Simpson, resuelva la siguiente integral definida, con n = 8

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Solución:

Con n par utilizamos Simpson 1/3.

$$h = \frac{2-0}{8} = 0.25$$

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

n	x	f(x)
0	0.00	0.00000
1	0.25	0.49608
2	0.50	0.96825
3	0.75	1.39054
4	1.00	1.73205
5	1.25	1.95156
6	1.50	1.98431
7	1.75	1.69443
8	2.00	0.00000

$$A_T = \left(\frac{0.25}{3}\right)\left[0 + 0 + 4[0.49608 + 1.39054 + 1.95156 + 1.69443] + 2[0.96825 + 1.73205 + 1.98431]\right]$$

$$\boldsymbol{A_T = 2.62497}$$

9) Dada la función tabular:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$f(x)$	36.75	42.1875	41.25	34.125	22.50	9.5625	0.00	0.00	17.25	60.9375	141.75

Determine el valor de la función para: x=1.27 y x=4.3. Utilice interpolación con incrementos constantes.

Solución:

$$\boldsymbol{f(1.27) = 38.0983057 \quad y \quad f(4.3) = 39.6396}$$

10 Utilizando el método de Euler modificado (Euler Gauss) con redondeo simétrico de 4 decimales, al aproximar la solución de la ecuación diferencial $y' = x - y$, con la condición inicial $y(0) = 1$ y $h = 0.02$, el resultado para $y(0.04)$ es:

Solución:

$$y_{(i+1)e} = y_i + h\,(x_i - y_i)$$

$$y_{(i+1)c} = y_i + \frac{h}{2}\left(x_i - y_i + x_{i+1} - y_{(i+1)e}\right)$$

para $i = 0$: $x_0 = 0,$ $y_0 = 1,$ $x_1 = 0.02$

$$y_{1e} = 1 + 0.02\,(0 - 1) = 0.98$$

$$y_{1c} = 1 + \frac{0.02}{2}\,(0 - 1 + 0.02 - 0.98) = 0.9804$$

para $i = 1$: $x_1 = 0.02,$ $y_1 = 0.9804,$ $x_2 = 0.04$

$$y_{2e} = 0.9804 + 0.02\,(0.02 - 0.9804) = 0.9612$$

$$y_{2c} = 0.9804 + \frac{0.02}{2}\,(0.02 - 0.9804 + 0.04 - 0.9612) = 0.9616$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y(0.04) = 0.9616}$$

11 Por el método de diferencias finitas, encuentre la solución a la ecuación diferencial $y'' - 2y + 5 = 0$ con las condiciones de frontera $y(0) = 0$ y $y(1) = 2$. Considere $h = 0.2$

Solución:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y_1} &= \mathbf{0.4621} \\ \boldsymbol{y_2} &= \mathbf{0.9053} \\ \boldsymbol{y_3} &= \mathbf{1.3199} \\ \boldsymbol{y_4} &= \mathbf{1.6921} \end{aligned}$$

12 Clasifique las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, según corresponda en hiperbólica, elíptica y parabólica:

a) Ecuación de Laplace (en estado estable con dos dimensiones espaciales).

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$$

b) Ecuación de conducción del calor (variable de tiempo con una dimensión espacial).

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{k}\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2}$$

c) Ecuación de onda (variable de tiempo con una dimensión espacial).

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

Solución:

a) Elíptica $\boldsymbol{B^2 - 4\,A\,C < 0}$

b) Parabólica $\boldsymbol{B^2 - 4\,A\,C = 0}$

c) Hiperbólica $\boldsymbol{B^2 - 4\,A\,C > 0}$

13 Para la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

a) De acuerdo con la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, ¿qué tipo de ecuación es?

b) Plantear la solución por diferencias finitas. (No resuelva la ecuación)

Solución:

a) $\mathrm{A}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{B}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} + \mathrm{C}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} + \mathrm{F} = 0$

$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$

Tipo Elíptica

b) $\mathbf{\frac{1}{h^2{}_x}\left[W\left(x_{i-1}, y_j\right) - \underline{2W\left(x_i, y_j\right)} + W\left(x_{i-1}, y_j\right)\right] + \frac{1}{h^2{}_y}\left[W\left(x_i, y_{j-1}\right) - \underline{2W\left(x_i, y_j\right)} + W\left(x_i, y_{j+1}\right)\right] = 0}$