DISTRIBUCIONES DERIVADAS DE LA NORMAL

Son tres distribuciones derivadas de la normal, las cuales se aplican es estadística inferencial para modelas las distribuciones en el muestreo. Estas distribuciones derivadas de la distribución normal son: la ji-cuadrada (χ^2), la *t* de Student y la F de Fisher-Snedecor.

1. La distribución ji-cuadrada.

La distribución ji-cuadrada surge de la suma de normales estándar al cuadrado, su definición formal es la siguiente:

Definición 1.1 Sean $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, entonces la variable aleatoria dada por:

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + ... + Z_k^2 \tag{1.1}$$

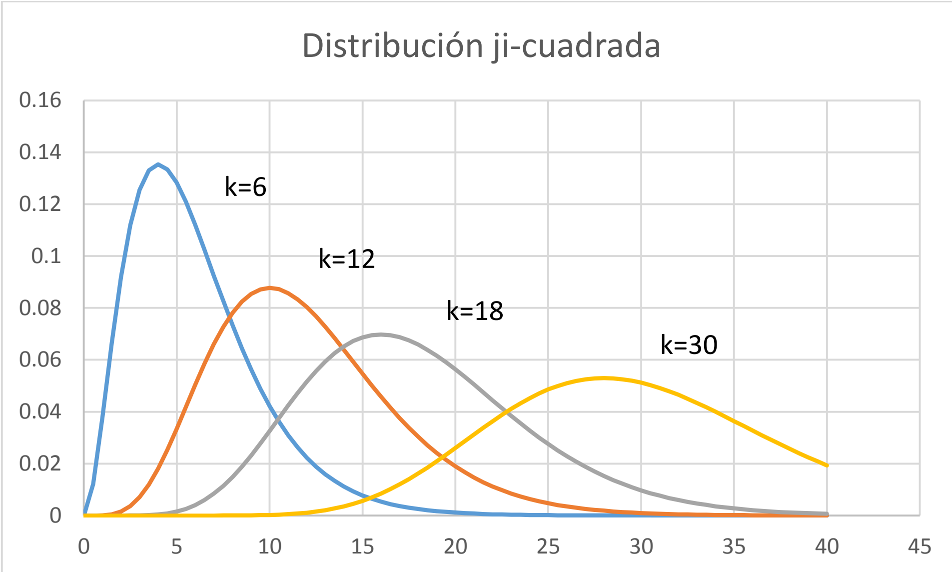
Tiene una distribución conocida como ji-cuadrada con *k* grados de libertad.

Teorema 1.1 Sea X una variable aleatoria ji-cuadrada con *k* grados de libertad, entonces su función de densidad es:

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \quad \text{para } x \geq 0; \quad \text{y } 0 \text{ en otro caso} \tag{1.2}$$

Obsérvese que la función de densidad ji-cuadrada corresponde a una densidad gamma con parámetros $\beta = 2$ y $\alpha = \frac{k}{2}$

La siguiente gráfica muestra la función de densidad de esta variable para distintos valores de *k*, observe que cuando k es pequeño la probabilidad se concentra en valores pequeños y conforme *k* crece la probabilidad se concentra en valores mayores.



Dado que la ji-cuadrada es l suma de variables aleatorias independientes, por el teorema del límite central, esta distribución se aproxima a un normal conforme *k* crece, como se puede ver en la gráfica.

El único parámetro de la distribución ji-cuadrada son los grados de libertad (el parámetro *k*) que corresponde al número de variables aleatorias independientes en la suma que define la variable. La variable ji-cuadrada siempre es positiva, pues corresponde a la suma de variables al cuadrado.

Teorema 1.2 Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes, tales que $X_1 \sim$ ji-cuadrada con *n* grados de libertad y $X_2 \sim$ ji-cuadrada con *m* grados de libertad, entonces $X_1 + X_2 \sim$ ji-cuadrada con $n+m$ grados de libertad.

Resumen	Variable aleatoria ji-cuadrada
Función de densidad	$f_k(x) = \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{k/2-1}e^{-x/2}$ para $x \geq 0$
Media	$\mu = k$
Varianza	$\sigma^2 = 2k$
Función generatriz de momentos	$M_x(t) = (1-2t)^{-k/2}, \qquad t < \dfrac{1}{2}$

La mayoría de los textos de Probabilidad y Estadística contienen tablas de la distribución ji-cuadrada con los valores de *x*, tales que

$$P(X > x) = \alpha$$

Para

$$\alpha = 0.995, 0.99, 0.975, 0.95, 0.90, 0.10, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$$

Si se requiere calcular la probabilidad del complemento se usa la fórmula:

$$P(X < x) = 1 - P(X > x)$$

Ejemplo 1. Sea *X* una variable aleatoria ji-cuadrada con 9 grados de libertad, encontrar el valor de *x*, tal que:

- $P(X > x) = 0.025$
- $P(X < x) = 0.025$

Solución:

Para hallar el valor de *x*, tal que:

$$P(X > x) = 0.025$$

En la tabla de la ji-cuadrada busque en la columna correspondiente la probabilidad 0.025 y el renglón de 9 grados de libertad para encontrar $x = 19.023$.

Para determinar el valor de *x*, tal que:

$$P(X < x) = 0.025,$$

Se encuentra la probabilidad del complemento $P(X > x) = 0.975$, ahora en la columna de 0.975 busque el renglón de 9 grados de libertad y ahí se encuentra el valor de $x = 2.700$.