DISTRIBUCIONES DERIVADAS DE LA NORMAL

Son tres distribuciones derivadas de la normal, las cuales se aplican es estadística inferencial para modelas las distribuciones en el muestreo. Estas distribuciones derivadas de la distribución normal son: la ji-cuadrada (χ^2), la *t* de Student y la F de Fisher-Snedecor.

1. La distribución ji-cuadrada.

La distribución ji-cuadrada surge de la suma de normales estándar al cuadrado, su definición formal es la siguiente:

Definición 1.1 Sean $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, entonces la variable aleatoria dada por:

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + ... + Z_k^2 \qquad (1.1)$$

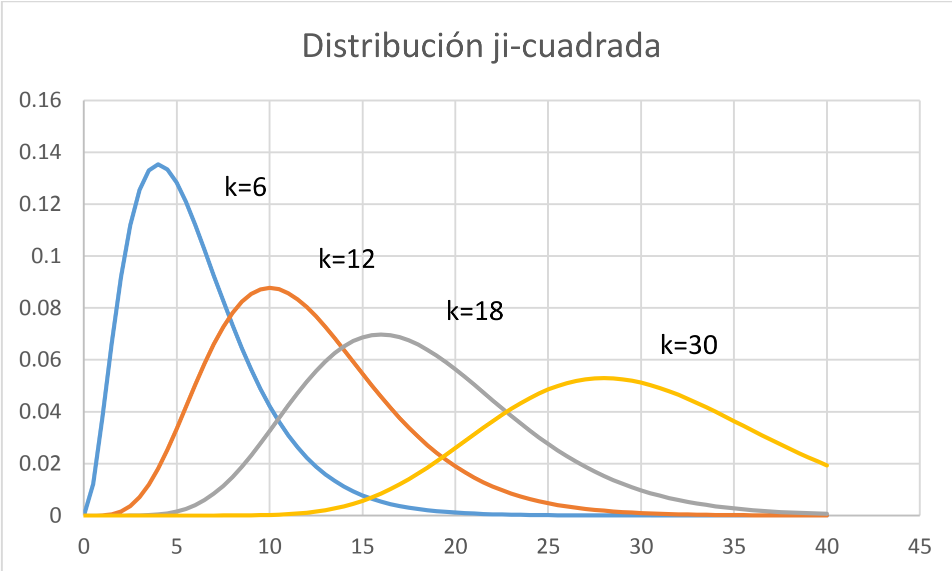
Tiene una distribución conocida como ji-cuadrada con *k* grados de libertad.

Teorema 1.1 Sea X una variable aleatoria ji-cuadrada con *k* grados de libertad, entonces su función de densidad es:

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \quad \text{para } x \geq 0; \quad \text{y } 0 \text{ en otro caso} \qquad (1.2)$$

Obsérvese que la función de densidad ji-cuadrada corresponde a una densidad gamma con parámetros $\beta = 2$ y $\alpha = \frac{k}{2}$

La siguiente gráfica muestra la función de densidad de esta variable para distintos valores de *k*, observe que cuando k es pequeño la probabilidad se concentra en valores pequeños y conforme *k* crece la probabilidad se concentra en valores mayores.



Dado que la ji-cuadrada es l suma de variables aleatorias independientes, por el teorema del límite central, esta distribución se aproxima a un normal conforme k crece, como se puede ver en la gráfica.

El único parámetro de la distribución ji-cuadrada son los grados de libertad (el parámetro k) que corresponde al número de variables aleatorias independientes en la suma que define la variable. La variable ji-cuadrada siempre es positiva, pues corresponde a la suma de variables al cuadrado.

Teorema 1.2 Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes, tales que $X_1 \sim$ ji-cuadrada con n grados de libertad y $X_2 \sim$ ji-cuadrada con m grados de libertad, entonces $X_1 + X_2 \sim$ ji-cuadrada con $n + m$ grados de libertad.

Resumen	Variable aleatoria ji-cuadrada
Función de densidad	$f_k(x) = \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$ para $x \geq 0$
Media	$\mu = k$
Varianza	$\sigma^2 = 2k$
Función generatriz de momentos	$M_x(t) = (1-2t)^{-k/2}, \qquad t < \dfrac{1}{2}$

La mayoría de los textos de Probabilidad y Estadística contienen tablas de la distribución ji-cuadrada con los valores de x, tales que

$$P(X > x) = \alpha$$

Para

$$\alpha = 0.995, 0.99, 0.975, 0.95, 0.90, 0.10, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005$$

Si se requiere calcular la probabilidad del complemento se usa la fórmula:

$$P(X < x) = 1 - P(X > x)$$

Ejemplo 1. Sea *X* una variable aleatoria ji-cuadrada con 9 grados de libertad, encontrar el valor de *x*, tal que:

- $P(X > x) = 0.025$
- $P(X < x) = 0.025$

Solución:

Para hallar el valor de *x*, tal que:

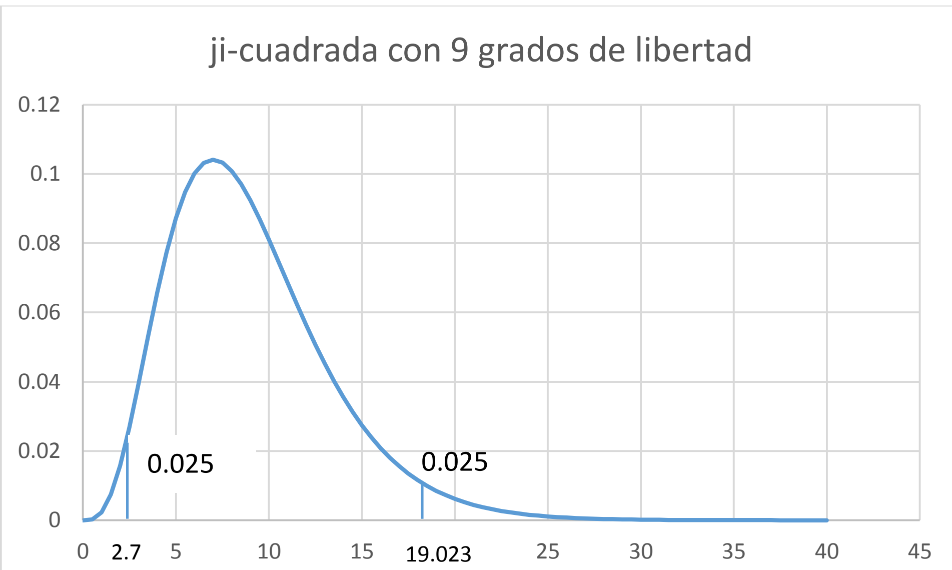
$$P(X > x) = 0.025$$

En la tabla de la ji-cuadrada busque en la columna correspondiente la probabilidad 0.025 y el renglón de 9 grados de libertad para encontrar $x = 19.023$.

Para determinar el valor de *x*, tal que:

$$P(X < x) = 0.025,$$

Se encuentra la probabilidad del complemento $P(X > x) = 0.975$, ahora en la columna de 0.975 busque el renglón de 9 grados de libertad y ahí se encuentra el valor de $x = 2.700$.



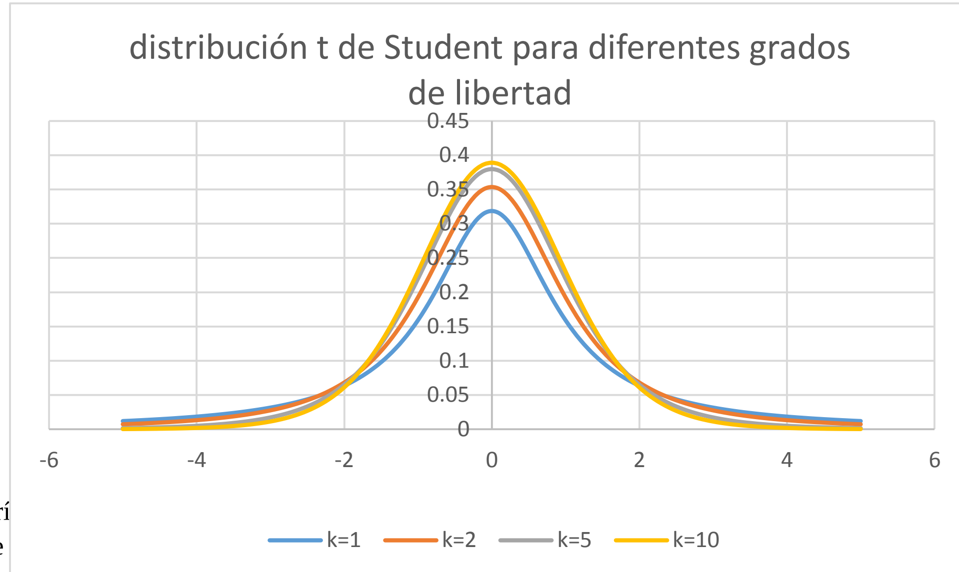
2. La distribución t de Student.

La distribución *t* de Student la propuso en 1908 William S. Gosset, quien usaba el seudónimo de Student en sus publicaciones y se define así:

Definición 1.2 Sean *X* y *Y* variables aleatorias independientes, tales que $X \sim N(0,1)$ y $Y \sim$ ji-cuadrada con *n* grados de libertad, entonces la variable:

$$W = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{1.3}$$

Es una variable *t* de Student con *n* grados de libertad. Los grados de libertad corresponden a los grados de libertad de la ji-cuadrada del denominador.



La mayorí ... $\sim t$ con n grados de

$$P(X < x) = \alpha$$

En el renglón superior de la tabla se hallan los valores para

$\alpha = 0.75, 0.90, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.9975, 0.9999, 0.99995, 0.999975$ y 0.99999

En la primera columna están los grados de libertad y en las restantes columnas se encuentran los valores de x.

Ejemplo 2.

Sea X distribuida como *t* de Student con 10 grados de libertad, encontrar la probabilidad.

- $P(X < x) = 0.95$
- $P(X > x) = 0.05$
- $P(X < x) = 0.05$

Solución:

- La probabilidad $P(X < x) = 0.95$ se lee directamente en la tabla, de manera que se debe ir a la columna señalada como 0.95; en esta columna se observará el renglón de los grados de libertad igual que 10, ahí se encuentra el valor de $x = 1.812$.
- La probabilidad de $P(X > x) = 0.05$, no la trae la tabla, pues la variable aleatoria X está por arriba del valor x. Para poder utilizar las tablas, se determina el complemento de esta probabilidad $P(X < x) = 1 - 0.05 = 0.95$, ahora, en la columna correspondiente a 0.95 se busca el renglón de 10 grados de libertad y en esa celda se halla el valor de $x = 1.812$.
- La probabilidad de $P(X < x) = 0.05$ es una probabilidad acumulada, pero en la tabla no se encuentra el 0.05, de manera que para encontrar el valor de x se utiliza la simetría de la distribución t, entonces se satisface que $P(X < -x) = P(X > x) = 0.05$ y es el mismo valor del inciso anterior, $x = 1.812$.

3. La distribución F

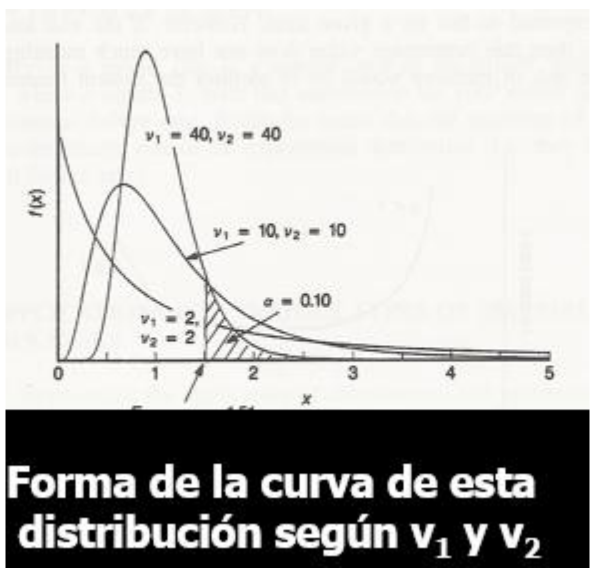
La función F la introdujeron George Waddell Snedecor y Ronald Fisher, razón por la cual esta distribución lleva el nombre de sus autores.

Definición 1.2 Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución ji-cuadrada con grados de libertad ν_1 y ν_2, respectivamente, entonces la variable aleatoria:

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

Tiene distribución F con ν_1 y ν_2, grados de libertad. Observe que los grados de libertad son los de las variables ji-cuadrada que están en el numerador y en el denominador respectivamente.

La función de densidad F tiene una gráfica semejante a la gráfica de la función ji-cuadrada, como se puede observar en la siguiente figura:



También se publican tablas para la obtención de los valores de la probabilidad:

$$P(F > x) = \alpha$$

Algunas de ellas consignan los valores de $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.001.

En el primer renglón de la tabla se tienen los grados de libertad del numerador (ν_1) y en la primera columna de la izquierda están los grados de libertad del denominador (ν_2), Los valores de la tabla se denotan por F_α.

Ejemplo 3.

Encontrar:

a) $F_{0.05}$ con $v_1 = 6\ y\ v_2 = 10$

b) $F_{0.01}$ con $v_1 = 6\ y\ v_2 = 10$

Solución:

a) Los grados de libertad del numerador son $v_1 = 6$ y los grados de libertad del denominador son $v_2 = 10$. Con $\alpha = 0.05$ de la tabla F se lee 3.22 Por tanto, $F_{0.05,\,6,10} = 3.22$.

b) Para este inciso se busca $\alpha = 0.01$ en la tabla F con $v_1 = 6\ y\ v_2 = 10$ y se obtiene $F_{0.01,\,6,10} = 5.39$