UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

PROBABILIDAD

Apuntes de la Materia

Tema 1
Teoría de la Probabilidad

PROFESOR: ING. ANDRÉS B. RAMÍREZ Y VILLA

FECHA 25 de agosto de 2019

TEMA 1. Teoría de la probabilidad.

Objetivo: El alumno comprenderá el concepto de probabilidad, así como los teoremas en los que se basa esta teoría.

Experimento.- Toda acción que se realiza para la obtención de un resultado.

Experimento
- Determinista; se conoce de antemano el resultado
- Aleatorio; No se conoce el resultado antes de realizar el experimento

Espacio muestral o espacio de eventos “S“: son todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

$$S = \{X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n\}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

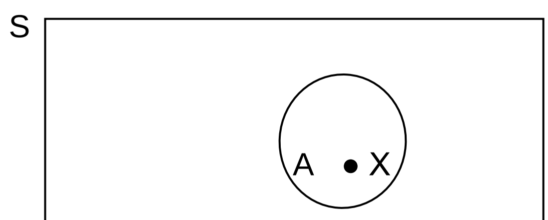
Evento compuesto ò evento: Es un subconjunto del espacio de eventos cuyos elementos tienen una característica en común.

$$A = \{x \mid x \text{ es impar}\} = \{1, 3, 5\}$$

Evento elemental ò punto muestral: Es uno de los resultados o elementos de un evento.

$$X \in A \subset S$$

Ejemplificado con el diagrama de Venn - Euler:



dónde:

S = espacio de eventos

A = evento compuesto o evento

X = evento elemental o punto muestral

Designación de eventos:

S = { x | x es el resultado del tiro del dado} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Por comprensión Por extensión

B = {X | X es par} = {2, 4, 6}

X = {4} 4∈ B

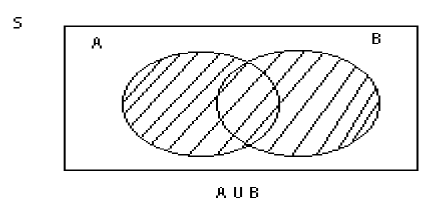
-OPERACIONES ENTRE EVENTOS

Sean A y B eventos tales que A C S y B C S

Las operaciones siguientes tienen la propiedad de cerradura.

- **Unión**

A U B = {x | x Є A ó x Є B}



U: se refiere a uno u otro o ambos, o por lo menos uno de ellos.

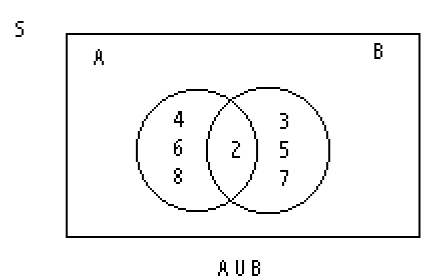
Ejemplo:

Sea S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {2, 4, 6, 8}= {x | x es un número par}

B = {2, 3, 5, 7}= {x | x es un número primo}

A U B = {2, 3, 4. 5, 6, 7, 8}



COROLARIO

A U B = B U A; propiedad de conmutatividad

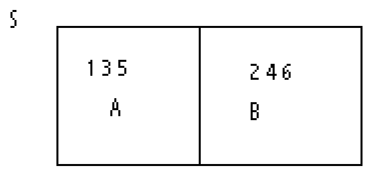
Ejemplo:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {1, 3, 5}

B = {2, 4, 6}

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = S

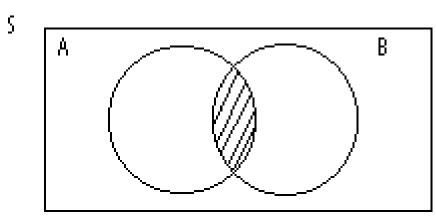


A, B Son eventos colectivamente exhaustivos

A, B Son eventos mutuamente excluyentes

- **Intersección**

$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$



$A \cap B$

Del ejemplo anterior: $A \cap B = \{2\}$

COROLARIO

$A \cap B = B \cap A$; propiedad de conmutatividad

Si $A \cap B = \{\ \}$ = evento imposible = Φ

Ejemplo:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {1, 3, 5}   A ∩ B = { } = Φ

B = {2, 4, 6}

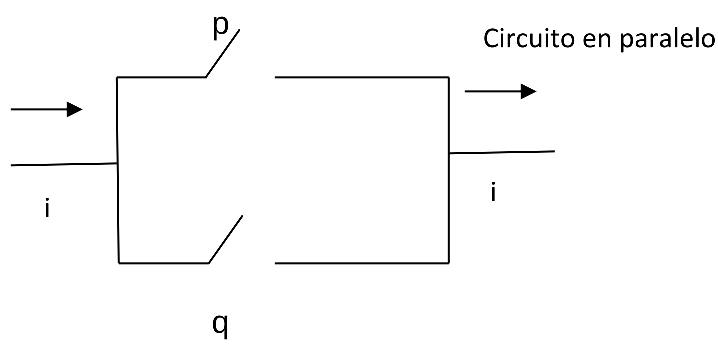
Si A ∩ B = Φ; entonces A, B son eventos mutuamente excluyentes

A S también se le denomina “evento seguro “

Relación en la lógica matemática

Disyunción; sean p y q dos proposiciones lógicas: p v q = p disyunción q

TABLA DE VERDAD		
P	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



Conjunción; sean p y q dos proposiciones lógicas: p Λ q = p conjunción q

Circuito en serie

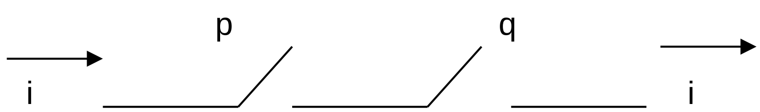
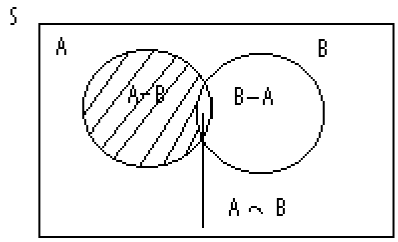


TABLA DE VERDAD		
p	q	p Λ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Diferencia; sean A ⊆ S y B ⊆ S, ⊆: está contenido en, o es igual

$A - B = A\backslash B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$



$S = \{ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \}$

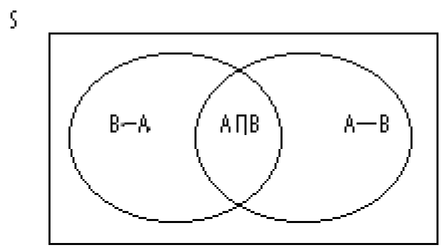
$A = \{ 2,4,6,8 \}$

$B = \{ 2,3,5,7 \}$

$A - B = \{ 4,6,8 \}$

Corolario 1 ; $A - B \neq B - A$ anticonmutatividad $B - A = \{ 3,5,7 \}$

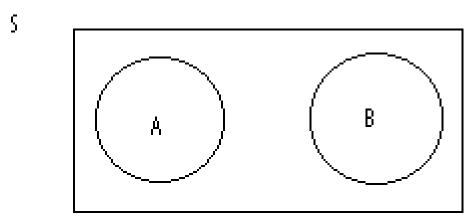
Corolario 2; $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$



Corolario 3; si A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces;

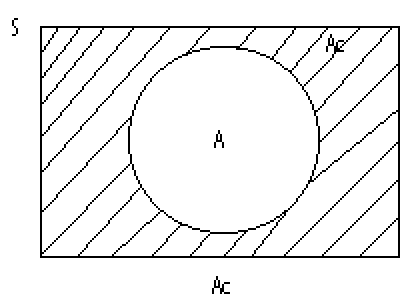
$A - B = A$

$B - A = B$



Complemento ;Sea $A \subseteq S$

$A^c = A' = \bar{A} = S - A = \{ x \mid x \in S , x \notin A \}$ donde ; A^c: complemento de A



Del ejemplo anterior: $A^c = \{0, 1, 3, 5,7,9\}$

Corolario 4;

a) A U A^c = S
b) A ∩ A^c = Φ

LEYES DE DE'MORGAN

a) $(A \bigcup B)' = A' \bigcap B'$

b) $(A \bigcap B)' = A' \bigcup B'$

- **Cardinalidad de un evento n(A) = #A:** Es el número de elementos no repetidos del evento

Ejemplo:

n(S) = 10

n(A) = 4

n(B) = 4

n(A – B) = 3

Ejemplo:

A = { 1,0,0,1,0,0,1 } n(A) = 2 B = { 3,4,4,5,7,7,8} n(B) = 5

TÉCNICAS DE CONTEO O ANÁLISIS COMBINATORIO

- **Teorema fundamental del conteo (acciones o eventos).**

Si una acción puede realizarse de m maneras distintas y una segunda acción puede realizarse de n maneras distintas entonces ambas acciones se podrán realizar de m x n maneras diferentes en el orden indicado.
Ejemplo:

A = {lanzamiento de un dado} = {1, 2, 3, 4, 5,6}

B = {lanzamiento de una moneda} = {a, s}

A X B = { (1,a),(1,s),(2,a),(2,s),(3,a),(3,s),(4,a),(4,s),(5,a),(5,s),(6,a),(6,s) }

n(A) = 6

n(B) = 2

n(AxB) = 6x2 = 12

Generalización :

Primera acción ----- m_1 maneras distintas

Segunda acción ---- m_2 maneras distintas

r-ésima acción ----- m_r maneras distintas

El número de resultados y en el orden indicado de las r acciones distintas, se calcula como ($m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$)

Ejemplo:

	menú de desayuno		
	entrada	plato fuerte	postre
	café	rancheros	
	yogurt	cereal	helado
	jugo	hot cakes	fruta
		chilaquiles	
totales =	3	4	2

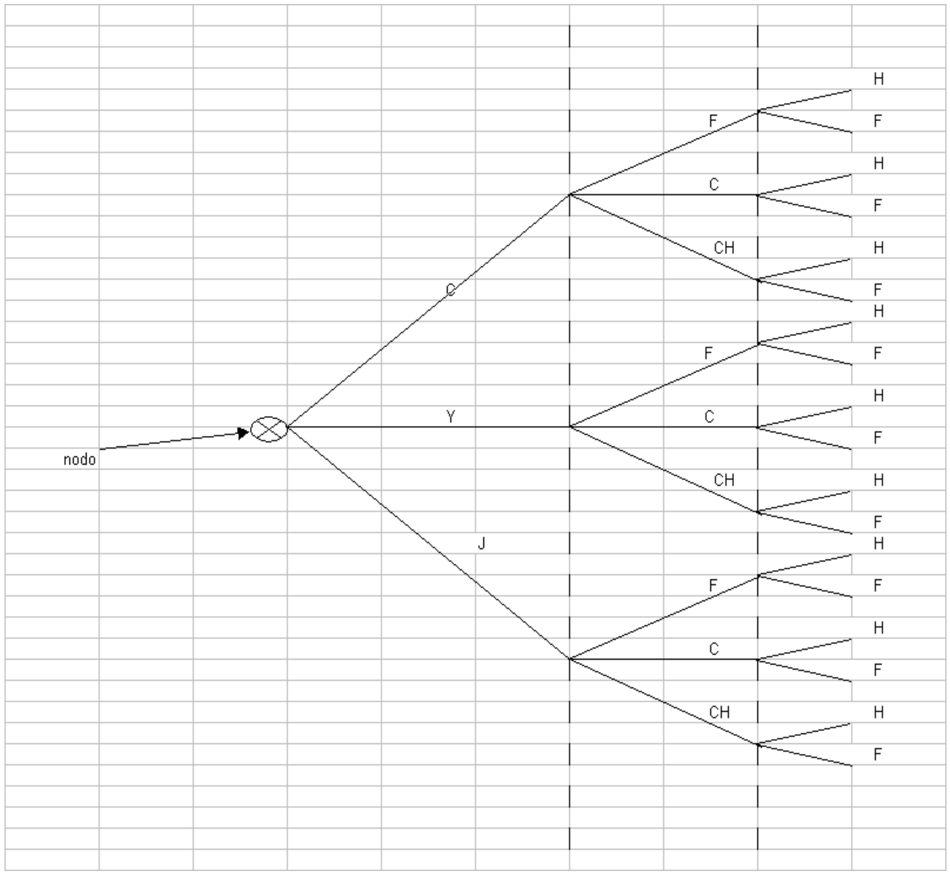
¿Cuantos menús distintos podías disfrutar? = 3x4x2 = 24

- **Diagrama de árbol**

Es una herramienta gráfica que permite representar las diferentes acciones lógicas consecutivas:

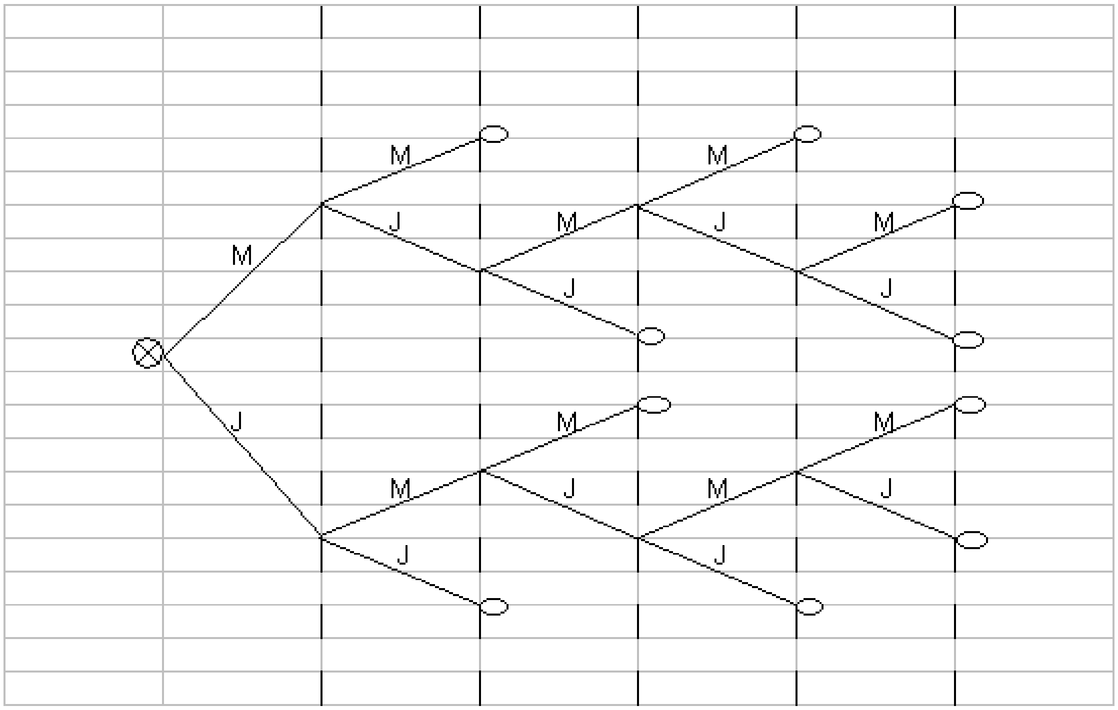
Se parte de un punto llamado nodo.

Del ejemplo:



Ejemplo:

Marisol y Julio participan en un torneo de tenis, el primero que gane dos juegos seguidos o un total de tres será el vencedor del torneo. Empleando un diagrama de árbol obtener el número total de maneras en que puede realizarse el torneo.



Total de maneras en el que se puede realizar el torneo n = 10

ANÁLISIS COMBINATORIO O TÉCNICAS DE CONTEO.

- Permutaciones simples u ordenaciones
- Permutaciones con repetición
- Permutaciones con grupos de elementos iguales
- Permutaciones circulares
- Combinaciones simples
- Combinaciones con repetición

Factorial de un número (entero no negativo)

n! = n(n–1) (n–2),.................. (3)(2)(1)

Ejemplo:

7! = 7x6x5x4x3x2x1 = 5040

nota: por definición 0! = 1

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL FACTORIAL

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

Corolario:

$$n = \frac{n!}{(n-1)!}$$

Ejemplo:

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

$$\frac{3!}{4!} + \frac{5!}{6!} = \frac{3!}{4 \cdot 3!} + \frac{5!}{6 \cdot 5!} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

Demostraciones:

$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} = \frac{(r+1)n! + (n-r)n!}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{rn! + n! + nn! - rn!}{(r+1)!\,(n-r)!} +$$

$$\frac{n!\,(1+n)}{(r+1)!\,(n-1)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!}$$

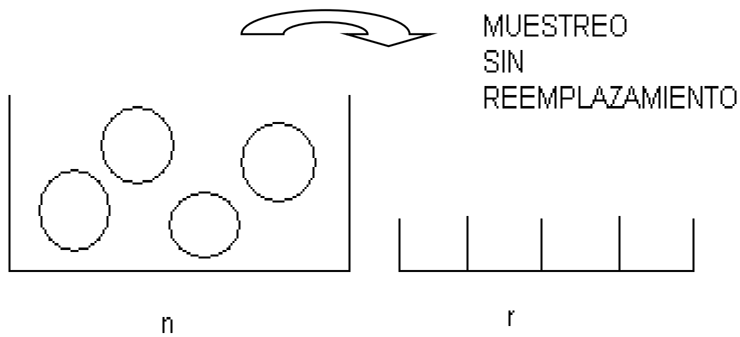
$$\frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} = \frac{(n-r+1)n! + r!\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{nn! - rn! + n! + rn!}{r!\,(n-r+1)!} +$$

$$\frac{nn! + n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

- ***Permutaciones simples***

Se llaman permutaciones simples de n elementos de orden r a los diferentes grupos ordenados que se pueden formar, al elegir r elementos de un grupo de n elementos dados, de tal manera que dos permutaciones se consideran distintas si difieren alguno de sus elementos ò en el orden de ellos. En la definición anterior, se ha considerado implícitamente que el orden r es menor ò igual que el número n de elementos dados, lo que equivale a no permitir la repetición de elementos en una misma permutación.

$$r \leq n$$



Ejemplo. Obtener las permutaciones de los órdenes 1, 2, 3 de las 4 letras a, b, c y d

-Orden 1

a b c d 4

-Orden 2

ab ba ca da

ac bd cb db 12

ad bc cd dc

-Orden 3

abc bac cab dab

abd bca cad dba

adb bcd cba dca 24

adc bdc cbd dac

acb bda cab dbc

acd bad cad dcd

-Cálculo del número de permutaciones simples:

1) Elegir el primer elemento las n maneras posibles
2) Elegir el segundo elemento las (n-1) maneras posibles

3) Elegir el tercer elemento las (n-2) maneras posibles

a) Elegir el r-èsimo elemento las (n-r+1) maneras posibles

$$P_n^r = nPr = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplos:

1.- Calcular el número de arreglos diferentes de tres letras que se pueden formar con las letras de la palabra LIBRETA, si en los arreglos no se permiten tener letras repetidas.

n= 7 r= 3

$$P_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

2.-Cuántos comités formados por un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal se pueden elegir de un grupo de 10 personas que son candidatos a cualesquiera de los puestos.

n=10 r= 4

$$P_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Ejemplo: ¿Cuántas filas de 6 personas se pueden formar de un grupo de 10, si 3 de las personas deben estar siempre juntas, aparezcan o no en la fila?

a) Las 3 personas de la condición no aparecen en la fila.

n=7, r=6

$$P_7^6 = \frac{7!}{(7-6)!} = 5040$$

b)

$$P_7^3 \cdot 4 \cdot 3! = \frac{7!}{(7-3)!} = 5040$$

Total de filas=5040+5040=10080

Ejemplo: De cuantas maneras se pueden colocar 10 libros si 4 de ellos deben estar siempre juntos.

a) Si se requiere que el grupo de 4 libros debe ocupar en un lugar determinado.

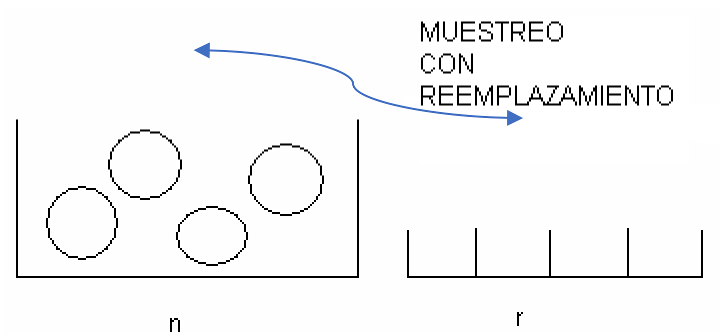
$$P_6^6 \cdot 7 \cdot 4! = 120960$$

Permutaciones con repetición

Son arreglos ordenados en donde pueden repetirse elementos en el mismo arreglo, por lo que puede suceder que el orden r de las permutaciones con repetición sea mayor que el número n de elementos dados.

$r \leq n$

$r > n$



Ejemplo:

Obtener las permutaciones con repetición de las órdenes 1, 2, 3 de las letras a, b, c.

-Orden 1

a b c 3

-Orden 2

aa ba ca

ab bb cb   9

ac bc cc

-Orden 3

aaa baa caa

aab bab cab

aac bac cac

aba bba cba

abb bbb cbb   27

abc bbc cbc

aca bca cca

acb bcb ccb

acc bcc ccc

- **Cálculo del número de permutaciones con repetición.**

1) Elegir el primer elemento de las n maneras posibles distintas
2) Elegir el segundo elemento de las n maneras posibles distintas

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

r) Elegir el r-ésimo elemento de las n maneras posibles distintas

$$PR_n^r = n^r$$

Ejemplos: El alfabeto Morse consta de dos elementos “punto” y “raya”. ¿Cuántos mensajes se pueden formar si cada mensaje puede contener hasta cuatro de tales elementos?

Morse + -

1 elemento

+ - =2

2 elementos

+ +

+ - =4

- +

- -

3 elementos

+ + +

+ + -

+ - +

- + + =8

+ - -

- + -

- - +

- - -

4 elementos

+ + + +

+ + + -

+ + - +

+ - + +

+ - + -

+ - - - =16

+ - - -

- + + +

- + + -

- + - +

- + - -

- - + +

- - + -

- - - +

- - - -

Total 30 mensajes.

2+4+8+16= 30

Ejemplo:

1) cuántos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5

$PR_5^5 = 3125$ = 5^5

2) cuantos números diferentes de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4

nota: debe tenerse en cuenta que los números de 5 cifras que empiecen con un 0 o más en realidad no tienen 5 cifras sino menos.

$PR_5^5 - \frac{1}{5}PR_5^5 = 2500$

- ***Permutaciones con grupos de elementos iguales***

Sea una muestra de n elementos en los que hay α elementos iguales y β elementos iguales.

El número de permutaciones con α elementos iguales y β elementos iguales es X.

Si se toman los α elementos iguales y se transforman en α elementos distintos y se permutan de las $\alpha!$ maneras distintas.

Se obtendrán las permutaciones de n elementos donde hay α elementos distintos y β elementos iguales:

$$x\alpha!$$

Si se toman los β elementos iguales y se transforman en β elementos distintos y se permutan de las $\beta!$ maneras distintas,

S obtendrán las permutaciones de n elementos donde hay α elementos distintos y β elementos distintos:

$$X\alpha!\beta! = n!$$

$$x = P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!};\ \alpha + \beta = n$$

Permutaciones de n elementos donde hay α elementos iguales y β elementos iguales

$$\alpha + \beta = n$$

Ejemplo: En una urna hay 10 bolitas de las cuales 4 son blancas y 6 son negras. Calcular el número de arreglos diferentes que se pueden formar con las 10 bolitas.

$$P_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$$

La expresión anterior puede generalizarse:

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,w} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\dots w!};\ \alpha + \beta + \cdots + w = n$$

Ejemplo: Se tiene un asta bandera de 10 posiciones y 10 banderas de las que 5 son rojas, 3 azules y dos blancas. Calcular el número de señales diferentes que pueden formarse al colocar todas las banderas simultáneamente en el asta.

5R, 3A, 2B

$$P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2520$$

Ejercicio: Calcular cuantas permutaciones se pueden formar con las letras de las palabras:

a) EVA
b) LAURA
c) INGENIERIA
d) SOCIOLOGICOS
e) CIBERNETICA
f) MURCIELAGO

a)

$$PR_3^1 = \frac{3!}{1} = 6$$

b)

$$PR_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$$

c)

$$PR_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{2!\,2!\,3!} = 151200$$

d)

$$PR_{12}^{4,2,2,2} = \frac{12!}{4!\,2!\,2!\,2!} = 2494800$$

e)

$$PR_{11}^{2,2,2} = \frac{11!}{2!\,2!\,2!} = 4989600$$

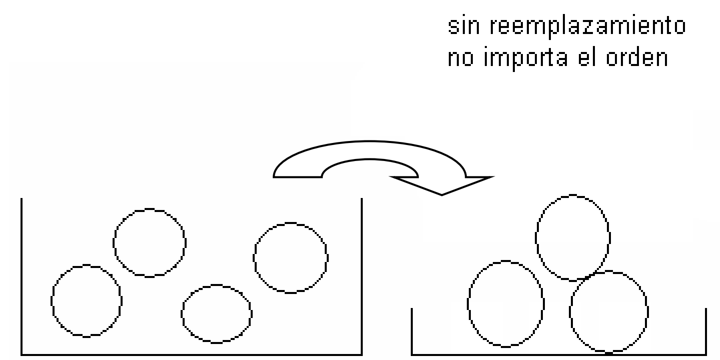
f)

$$PR_{10}^1 = \frac{10!}{1} = 3628800$$

- ***Combinaciones simples***

Se llaman combinaciones de n elementos de orden r a los diferentes grupos que pueden formarse al elegir r elementos de n elementos dados, de tal manera que 2 combinaciones son distintas si difieren en el número de sus elementos.

$r \leq n$



Ejemplo: Calcular el número de combinaciones de las 4 letras a, b, c, d

-Orden 1

a b c d 4

-Orden 2

ab bc cd

ac bd 6

ad

-Orden 3

abc bcd

abd 4

acd

-Orden 4

abcd 1

- **Cálculo del número de combinaciones C_n^r**

$$P_n^r = C_n^r \cdot r!$$

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

$$C_n^r = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Combinaciones simples de n elementos y de orden r.

Notación

$$C_n^r = nCr = \binom{n}{r}$$

Ejemplo: Cuantos comités distintos de 4 personas se pueden formar de un grupo de 10.

n = 10, r = 4 $\qquad {}_{10}C_4 = 10!/[4!(10-4)!] = 210$

- **Números combinatorios**

-nCr

Definición: se llaman números combinatorios de n elementos de orden r a las combinaciones de n elementos de orden r.

$\binom{n}{r}$ n numerador, r orden ; Enteros positivos $r \leq n$

Propiedades de los números combinatorios:

1. Los números combinatorios de orden 0 valen la unidad:

$$\binom{n}{0} = 1$$

2. Los números combinatorios de orden 1 son igual a su numerador:

$$\binom{n}{1} = n$$

3. Los números combinatorios de orden igual a su numerador valen la unidad:

$$\binom{n}{n} = 1$$

- **Números combinatorios de órdenes complementarios**

Definición: se llaman números combinatorios de órdenes complementarios a los números que tienen el mismo numerador y su orden está formado por la diferencia del numerador menos el orden del otro número combinatorio.

$$\binom{n}{r} \quad \binom{n}{n-r}$$

4. Los números combinatorios de órdenes complementarios son iguales

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

5. Se puede establecer la suma cerrada entre dos números combinatorios de acuerdo a las siguientes características:

   Para que la suma entre dos números combinatorios sea cerrada, es decir que su resultado sea otro número combinatorio, ambos sumandos, deberán tener el mismo numerador y su orden diferir en una unidad en exceso o en defecto.

   El resultado será otro número combinatorio cuyo numerador está aumentando en una unidad y cuyo orden será el mayor de los números combinatorios sumandos.

- **Teorema fundamental del binomio**

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^n = a^nb^0 + na^{n-1} b + n(n-1)a^{n-2}b^3 /2!+$..................$+ b^n$; para $n \epsilon R$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

- **Triangulo de pascal**

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \ldots & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

PROBABILIDAD CLÁSICA, FRECUENCIAL Y SUBJETIVA

El concepto de probabilidad es muy antiguo y a lo largo de la historia se ha definido de distintas formas, aunque todas ellas mantienen en común las características básicas del concepto. En general cuando hablemos de probabilidad lo haremos siempre en referencia a la probabilidad de un suceso y la entenderemos como una medida cuantificada de la verosimilitud de ocurrencia de un suceso frente a los demás sucesos del experimento. Pero qué duda cabe que esta definición no es del todo buena, pues se utiliza el término verosimilitud para definir la probabilidad, cuando el mismo es un sinónimo de lo que se quiere definir. También podría hablarse del grado de incertidumbre en la ocurrencia de los resultados de un experimento. En cualquier caso, la probabilidad de un suceso es una medida cuantificable que toma valores entre cero y uno a diferencia del concepto de posibilidad que es una medida cualitativa.

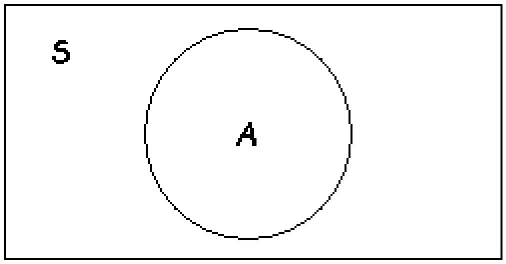
Probabilidad clásica o a priori (Regla de Laplace)

Si el experimento que estamos realizando da lugar a un espacio muestral E que es finito y cuyos resultados son mutuamente excluyentes y equiprobables o simétricos, entonces, la probabilidad del suceso A perteneciente a E se define como el cociente de los resultados favorables a A respecto del total de resultados posibles, este tipo de probabilidad es la que se emplea antes del evento, de ahí el nombre de a priori.

Probabilidad subjetiva.
Hay determinados experimentos aleatorios que no son susceptibles de realizarse y sus resultados no son equiprobables. Imaginemos que se quiere determinar la probabilidad: de que la economía de España crezca en el próximo año un 3%; que las acciones de una empresa se revaloricen en un 10% en un mes; que una empresa presente suspensión de pagos; que un nuevo producto sea bien acogido en el mercado; que ocurra un accidente nuclear; etc.
En estas circunstancias, donde los experimentos solo se pueden realizar una vez o ninguna o que se puedan repetir pero en condiciones distintas, no son aplicables ninguna de las dos definiciones dadas anteriormente, por lo que no es posible asignar probabilidades mediante un procedimiento objetivo, debiendo recurrir a procedimientos de tipo subjetivo, a opiniones de expertos. En estos casos la probabilidad expresa un grado de creencia o confianza
individual en relación con la ocurrencia o no de un determinado suceso. Se trata de un juicio personal sobre el resultado de un experimento aleatorio. Además, debemos admitir la posibilidad de que distintos sujetos asignen probabilidades diferentes al mismo suceso. No obstante, esta definición de probabilidad también satisface las tres propiedades vistas antes.

Probabilidad axiomática

Sea A un evento y S el espacio de eventos $A \subseteq S$



Probabilidad clásica

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{tamaño } de\ A}{\text{tamaño } de\ S} = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales}}$$

Kolmogorov

Primer axioma

$0 \leq P(A) \leq 1$

Segundo Axioma

Si Ø es el evento imposible

P (Ø) = 0

Si S es el evento seguro

P(S) = 1

Cada uno de los elementos del espacio de eventos tienen la misma oportunidad de aparición por lo que a S se le considera un espacio equiprobable:

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$; donde A_i: son eventos colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$

-Axioma

Sea A y A' (complemento); son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

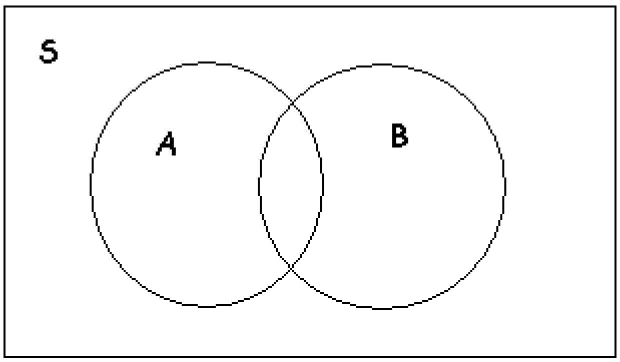
$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1 = P(S)$

$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$ probabilidad del complemento

- **Teoremas derivados de axiomas**

-Ley de adición de probabilidades

Sean A C= S y B C= S y A ∩ B ≠ Ø; es decir A y B son eventos no mutuamente excluyentes.



n(A U B) = n(A) + n(B) – n(A∩B)

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(s)} = \frac{n(A)}{n(s)} + \frac{n(B)}{n(s)} - \frac{n(A \cap B)}{n(s)}$$

$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

- **Ley de adición para dos eventos no mutuamente excluyentes**

U: o ambos o por lo menos uno de ellos

P(A U B) = P(A) + P(B)

Si A y A´ son eventos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

$A \cap A' = \emptyset$

$A \cup A' = S$

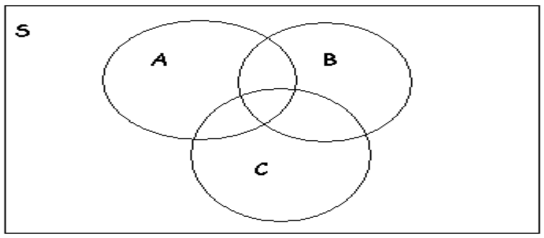
Entonces

$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(s) = 1$

$P(A^{c}) = 1 - P(A)$

- **Ley de adición para dos eventos mutuamente excluyentes**

Ahora sean A C= S, B C= S y C = S y A∩B∩C = Ø



P(AUBUC) = P(A) +P(B) +P(C) – P(A∩B) – P(A∩C) – P(B∩C) + P(A∩B∩C)

- **Ley de adición de probabilidades para 3 eventos no mutuamente excluyentes**

Ejemplo:

Se lanza un dado una vez

Determinar la probabilidad de que:

1. la cara superior muestre 3 puntos 1/6
2. la cara superior muestre al menos 5 puntos 2/6 =1/3

Ejemplo:

Una caja contiene 12 transistores buenos y 3 defectuosos, se sacan 3 transistores de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

P(1b) = 12/15

P(2b) = 11/14

P(3b) = 10/13 P(b) = 12/15 x 11/14 x 10/13 = 44/91 ≈ 0.4835

Ejemplo:

Se lanza un par de dados. Sea A el evento "la suma de los puntos muestrales es 7", B el evento "la suma de los puntos muestrales es 10" y sea C el evento "la suma de los puntos muestrales es par". Determina:

1. ¿son los eventos A y B mutuamente excluyentes?
2. ¿son A y C mutuamente excluyentes?
3. ¿son B y C mutuamente excluyentes?
4. calcular la probabilidad P(AUB), P(AUC) y P(BUC).

S
(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

1.- si son mutuamente excluyentes

2.- si son mutuamente excluyentes

3.- no son mutuamente excluyentes

4.-

P(AUB) = P(A) + P(B) = 6/36 + 3/36 = 1/4 P(AUC) = 2/3

P(BUC) = P(B) + P(C) – P(B∩C) = 3/36 + 18/36 – 3/36 = 1/2

Ejemplo:

Una señora que visita una tienda departamental a veces usa sus tarjetas de crédito 1, 2 ò 3; otras veces paga con cheque y algunas veces en efectivo. Las probabilidades de pagar con estas 5 alternativas son respectivamente 0.25, 0.29, 0.23, 0.19 y 0.04. ¿Cuál es la probabilidad de que en la próxima visita?:

1. no pague en efectivo
2. no use ninguna de sus tarjetas
3. use su tarjeta 1, o pague con cheque o pague en efectivo
4. que no pague en efectivo ni con cheque

1.-

P(T1) = 0.25 no pague en efectivo

P(T2) = 0.29 $\underline{P(EF)^{n} = 1-0.04 = 0.96}$

P(T3) = 0.23

P(CH) = 0.19

P(EF) = 0.04

____

$\sum = 1.00$

2.-

$\underline{P(TI \cup T2 \cup T3)^{n} = P(CH) + P(EF) = 0.19 + 0.04 = 0.23}$

3.-

$\underline{P(T1 \cup CH \cup EF) = P(T1) + P(CH) + P(EF) = 0.48}$

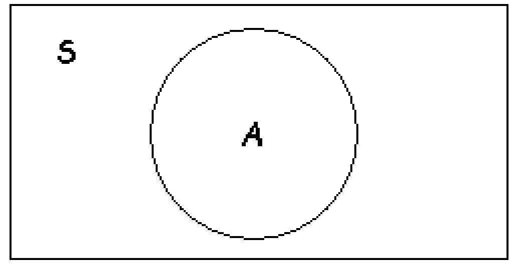
4.-

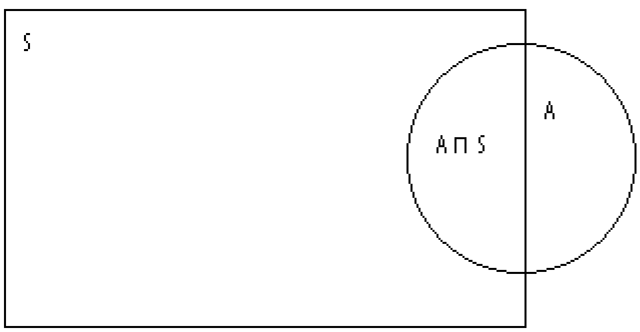
$\underline{P(EF \cup CH)^{n} = 1 - [P(EF) + P(CH)] = 1 - 0.23 = 0.77}$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = P(A \mid S)$$

Dada la ocurrencia de S





$$P(A \mid S) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

así:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donde;

P(A | B): probabilidad condicional

P(A ∩ B): probabilidad conjunta

P(B): probabilidad marginal

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE EVENTOS

De la expresión para la probabilidad condicional

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Queda:

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$ ley de multiplicación de probabilidades

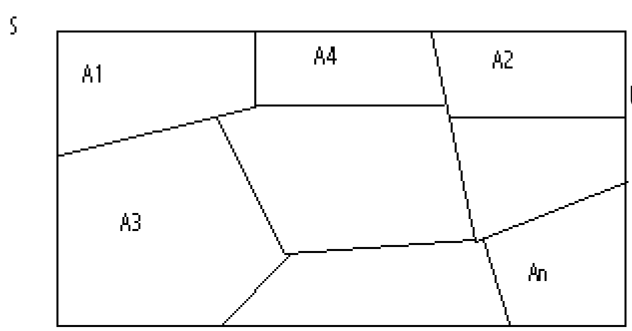
Para dos eventos dependientes.

Y a su vez:

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ ley de multiplicación de probabilidades

Para dos eventos independientes.

- **Probabilidad total. Teorema de Bayes.**



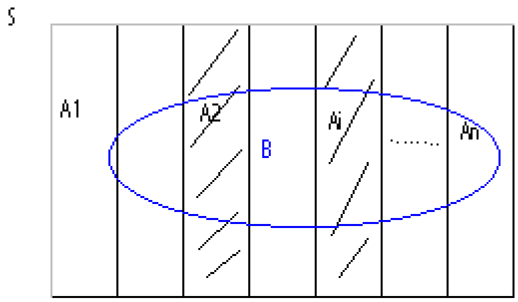
$\cup^{n}_{i=1} A_i = S$ colectivamente exhaustivos

$\cap^{n}_{i=1} A_i = \emptyset$ mutuamente excluyentes

$\sum^{n}_{i=1} P(A_i) = 1$

$P(A_i)$ i= 1, 2, …, n; son conocidas

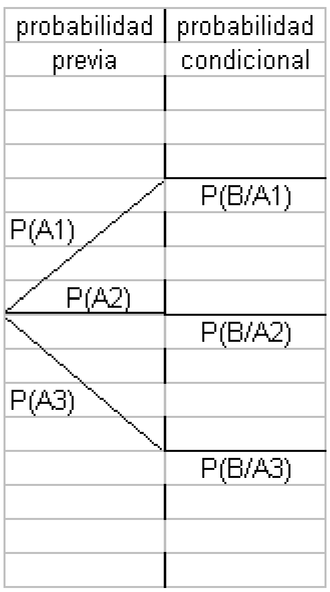
Sea la partición:



De la expresión para la probabilidad condicional.

$$P(B \mid A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$$

$P(A_i \cap B) = P(A_i) \bullet P(B \mid A_i)$



$= P(A1) \bullet P(B/A1) = P(A1 \cap B)$

$= P(A2) \bullet P(B/A2) = P(A2 \cap B)$

$= P(A3) \bullet P(B/A3) = P(A3 \cap B)$

$\Sigma \; = P(B)$ Probabilidad total

$$P(B) = \Sigma^{n}_{i=1} P(Ai) \bullet P(B \mid Ai)$$

$$P(B) = \Sigma^{n}_{i=1} P(Ai \cap B)$$

$$P(Ai \mid B) = \frac{P(Ai \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ai) \bullet P(B \mid Ai)}{\Sigma^{n}_{i=1} P(Ai) \bullet P(B \mid Ai)}$$

Teorema de Bayes.

Ejemplo:

Una muestra aleatoria de 200 adultos se clasifica por sexo y su nivel de educación como se muestra en la tabla. Si se escoge una persona al azar de este grupo encuentre la probabilidad de que:

1. la persona sea hombre, dado que la persona tiene educación secundaria.
2. la persona no tiene grado universitario, dado que la persona es mujer.

	SEXO		
EDUCACION	HOMBRE	MUJER	TOTALES
PRIMARIA	38	45	83
SECUNDARIA	28	50	78
FACULTAD	22	17	39
TOTALES	88	112	200

÷200

	SEXO		
EDUCACION	HOMBRE	MUJER	TOTALES
PRIMARIA	$P(H\cap P)=0.19$	$P(M\cap P)=0.225$	$P(P)=0.415$
SECUNDARIA	$P(H\cap S)=0.14$	$P(M\cap S)=0.25$	$P(S)=0.39$
FACULTAD	$P(H\cap F)=0.11$	$P(M\cap F)=0.085$	$P(F)=0.195$
TOTALES	$P(H)=0.44$	$P(M)=0.56$	1

1.-

$$P(H/S) = \frac{P(H\cap S)}{P(S)} = \frac{0.14}{0.39} = 0.3590$$

0.225+0.25=0.475

2.-

$$P(\text{no grado universitario}/M) = \frac{P(\text{no grado universitario} \cap M)}{P(M)} = \frac{0.475}{0.56} = 0.8482$$

Ejemplo:

En un experimento para estudiar la relación de la hipertensión arterial y los hábitos de fumar, se reúnen los siguientes datos para 180 individuos.

	no fumadores	fumadores moderados	fumadores empedernidos	totales
con hipertension	21	36	30	87
sin hipertension	48	26	19	93
totales	69	62	49	180

Si se seleccionan uno de estos individuos al azar. Encuentre la probabilidad de que la persona:

1. sufre hipertensión, dado que la persona es un fumador empedernido
2. sea un no fumador, dado que la persona no sufre de hipertensión

	no fumadores	fumadores moderados	fumadores empedernidos	totales
con hipertension	$P(NF \cap CH)=0.1166$	$P(FM \cap CH)=0.2$	$P(FE \cap CH)=0.1666$	$P(CH)=0.4832$
sin hipertension	$P(NF \cap SH)=0.2666$	$P(FM \cap SH)=0.1444$	$P(FE \cap SH)=0.1055$	$P(SH)=0.5165$
totales	$P(NF)=0.3832$	$P(FM)=0.3444$	$P(FE)=0.2721$	1

1.-

$P(CH/FE) = 0.1667/0.2721 = 0.6126$

2.-

$P(NF/SH) = 0.2667/0.5165 = 0.5163$

Ejemplo:

Si R es el evento de que un convicto cometiera un robo a mano armada y D es el evento de que el convicto promoviera el consumo de drogas, exprese en palabras lo que en notación de probabilidades se indica:

1. P(R/CD)
2. P(CD/R)
3. P(NR/NCD)

R: robo a mano armada
CD: promueve el consumo de drogas
NR. : no robo a mano armada
NCD: no promovió el consumo de drogas
1.- probabilidad de que robo a mano armada dado que promueve el consumo de drogas.

2.- probabilidad de que no promueve el consumo de drogas dado que robo a mano armada.

3.- probabilidad de que no robo a mano armada dado que no promueve el consumo de drogas.