Apuntes del Tema 1 de Ecuaciones Diferenciales: Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales.

Academia de Ecuaciones Diferenciales*

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

1.1. Definición de ecuación diferencial. Ecuación diferencial ordinaria. Definición de orden de una ecuación diferencial.

Definición de ecuación diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Si la ecuación diferencial involucra sólo una variable independiente, se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**. Si, por el contrario, la ecuación diferencial depende de varias variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial parcial**.

Si consideramos a y como una variable dependiente y a x como una variable independiente, la ecuación diferencial ordinaria más general se puede escribir como

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \tag{1}$$

donde $F(\cdot)$ denota una función que depende de $x,\ y$ y sus derivadas respecto de x.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias se describen a continuación.

Ecuación diferencial ordinaria: ejemplos. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2y}{d^2x} + 5\frac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x) = 0\ ; \qquad y'' - \frac{1}{x^2}y' + 5y = x$$

*Revisiones técnicas de Dra. Evelyn Salazar Guerrero, Ing. Jesús Antonio Patiño Ramírez y Dra. Anahí Flores Pérez, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Ecuación diferencial parcial: ejemplos. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \; ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial t}$$

Definición de orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial se define como la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Orden de una ecuación diferencial: ejemplos. La siguiente tabla muestra el orden de las ecuaciones diferenciales dadas.

Ecuación diferencial	Orden
$\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^4 = s - \frac{1}{t}$	3
$\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$	2
$(y')^3 - y'' + 5y = e^{3x}$	2
$y^{(IV)} - 2y' + 6y = 0$	4
$xy'' + 2\left(y^{VI}\right)^4 + 3x = 0$	6
$(2xy - sec^2(x))dx = -(x^2 + 2cos(y))dy$	1
$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, α= constante	2
$3\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2} + 4xy = 0$	5

1.2. Solución de la ecuación diferencial: general y particular. Definición de solución singular.

La **solución de una ecuación diferencial ordinaria** $F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$, es una función $\varphi(x)$ tal que, cuando sustituimos $y = \varphi(x)$, la ecuación se convierte en una identidad. Es importante notar que, posiblemente, lo anterior sólo suceda en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Solución de una ecuación diferencial: ejemplo. Sea la función $\varphi(x) = e^{2x}$ y la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - 5y' + 6y = 0$. Si hacemos $y = \varphi(x)$, calculamos las derivadas

$$y' = 2e^{2x} \; ; \;\; y'' = 4e^{2x},$$

y sustituimos en la ecuación, obtenemos

$$4e^{2x} - 5(2e^{2x}) + 6(e^{2x}) = 0,$$

$$10e^{2x} - 10e^{2x} = 0,$$

es decir, una identidad válida para cualquier x en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución de una ecuación diferencial de primer orden: ejemplo. Si en la ecuación: $y' = y$ se sustituye la función $y = Ce^x$, se llega a una identidad válida $\forall\, x$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y para cualquier valor de la constante C.

Del ejemplo anterior, notamos que la constante C no puede reducirse o modificarse sin alterar la solución dada. A este tipo de constantes se les llama **constantes esenciales** y estarán involucradas en nuestra siguiente definición.

La **solución general** de una ecuación diferencial de orden n es una expresión del tipo $y = \varphi(x, C_1, C_2, \;\cdots\;, \; C_n)$ que satisface la ecuación diferencial, en cierto intervalo, y que contiene un número de constantes esenciales igual al orden de la ecuación diferencial.

La **solución particular** de una ecuación diferencial ordinaria de orden n, es una función que satisface la ecuación diferencial y que se obtiene de la solución general especificando los n valores de sus constantes esenciales.

Por otro lado, pueden existir soluciones de una ecuación diferencial ordinaria que no sean particulares, es decir, que no puedan obtenerse a partir de la solución general para valores concretos de las constantes esenciales. En ese caso, las soluciones reciben el nombre de **soluciones singulares**.

Soluciones singulares para una ecuación diferencial: ejemplo. La ecuación diferencial $(y' - y)(y - x^3) = 0$ tiene como solución general $y = Ce^x$, pues, si calculamos su derivada y sustituimos en la ecuación, obtenemos

$$(Ce^x - Ce^x)(Ce^x - x^3) = 0,$$

que es una identidad $\forall\, x \in \; (-\infty, \infty)$. Sin embargo, la función $y = x^3$ también es una solución pues hace que la ecuación diferencial se reduzca a la siguiente identidad

$$(3x^2 - x^3)(x^3 - x^3) = 0, \;\forall\, x \in (-\infty, \infty).$$

Notemos que esta solución no puede ser obtenida para ninguna selección específica de C en la solución general, por tanto, es una solución singular.

Tres tipos de soluciones para una ecuación diferencial: ejemplo. Determina la naturaleza de las soluciones $y_1 = Cx - C^2$, $y_2 = -x - 1$ y $y_3 = \dfrac{x^2}{4}$ de la ecuación diferencial $(y')^2 - xy' + y = 0$.

a) Sea la función $y_1 = Cx - C^2$; entonces $y_1' = C$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(C)^2 - xC + (Cx - C^2) = 0.$$

Por tanto, $y_1 = Cx - C^2$ satisface la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para cualquier valor de C. Concluimos que se trata de la solución general de la ecuación diferencial.

b) Consideremos $y_2 = -x - 1$; $y_2' = -1$. Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$(-1)^2 - x(-1) + (-x - 1) = 0.$$

Entonces $y_2 = -x - 1$ es solución particular de la ecuación diferencial, $\forall x \in (-\infty, \infty)$, pues la satisface y es obtenida de la solución general mediante la selección $C = -1$.

c) Finalmente, $y_3 = \dfrac{x^2}{4}$; $y_3' = \dfrac{x}{2}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{4}\right) = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{2x^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 0.$$

Entonces $y_3 = \dfrac{x^2}{4}$ es también solución $\forall x \in (-\infty, \infty)$, sin embargo, no puede generarse a partir de alguna selección de C en la solución general. Es, por tanto, una solución singular.

Una manera de dar una **interpretación geométrica de las soluciones generales y particulares** es la siguiente. Considera la ecuación diferencial $y'y + x = 0$ cuya solución general es $y^2 + x^2 = C^2$. Si graficamos esta solución para diferentes valores de C el resultado será una familia de circunferencias concéntricas centradas en el origen como las mostradas en la figura 1.2. Este tipo de curvas son llamadas **curvas solución** o familia uniparamétrica de soluciones. Para este caso, la representación geométrica de la solución particular con $C = 9$, es decir $y^2 + x^2 = 9$, se muestra en color azul.

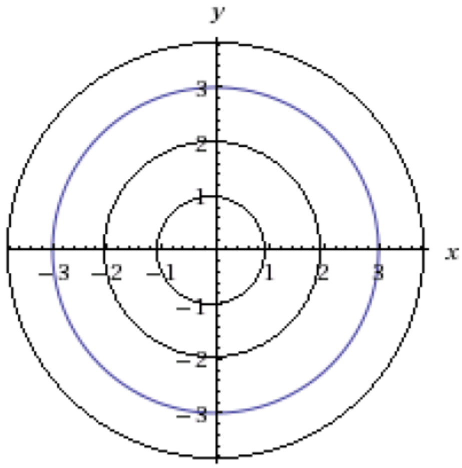


Figura 1: Representación geométrica de las soluciones generales y particulares.

1.3. Problema de valor inicial

Las ecuaciones diferenciales son la manera matemática de describir procesos y modelar sistemas en ingeniería. Con frecuencia, estaremos interesados en encontrar, si las hay, diferentes soluciones particulares pues ellas especifican el comportamiento de la variable dependiente propia del sistema como función de la variable independiente (por lo general, el tiempo).

Con base en la forma de la ecuación diferencial dada en (1), la expresión $F(x, y, y') = 0$ denota la ecuación diferencial ordinaria de primer orden más general. Para este análisis será conveniente poder despejar la primera derivada, es decir, reexpresar las ecuaciones diferenciales de primer orden como

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Como sabemos, es posible interpretar a la derivada como tasa de cambio o velocidad de cambio de una variable con respecto a otra. Por ejemplo, si encontramos la expresión

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0,$$

donde $P(t)$ es una función del tiempo t, podemos decir que $P(t)$ no varía respecto al tiempo. Dicho de otra manera, $P(t)$ es constante conforme el tiempo transcurre. En un ejemplo más complejo, si queremos expresar que la velocidad con la que varía $P(t)$ es proporcional a la propia $P(t)$ escribimos

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t), \tag{3}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Esta ecuación puede representar varios fenómenos, por ejemplo, decaimiento radioactivo, un modelo de población, un interés compuesto o como se desintegra una cápsula con medicamento dentro del estómago. De manera particular, pensemos que $P(t)$ denota el número de habitantes en una ciudad como función del tiempo. Si P_0 es el número de habitantes en un conteo inicial hecho en el tiempo t_0, la solución de la ecuación (3), sujeta a las condiciones $P(t_0) = P_0$, corresponderá a una solución particular de la ecuación diferencial que describirá por completo el crecimiento poblacional de la ciudad para cualquier tiempo futuro.

Lo anterior da lugar a definir el **problema de valor inicial de primer orden**, el cual consiste en encontrar la solución particular de la ecuación diferencial (2) que satisface la **condición inicial** $y(x_0) = y_0$, donde x_0 y y_0 son valores reales fijos.

Un problema típico es el siguiente.

Problema de valor inicial: ejemplo Mediante el método de separación de variables, que será abordado posteriormente, será posible calcular la solución general de $\dfrac{dy}{dx} = 2y$, la cual es $y = Ce^{2x}$, $\forall\ x \in (-\infty, \infty)$. Esta expresión genera toda una familia de curvas solución, sin embargo, supongamos que estamos interesados únicamente en aquel elemento de la familia que pasa por el punto $(0, 3)$, es decir, que satisface la condición $y(0) = 3$. Sustituyendo esta información en la solución general, obtenemos $3 = Ce^{2(0)} \Rightarrow C = 3$. Entonces, la solución particular que estamos buscando es $y = 3e^{2x}$.

1.4. Teorema de existencia y unicidad para un problema de valores iniciales.

En las secciones anteriores se han introducido las ecuaciones diferenciales y se han definido conceptos importantes relacionados con ellas, por ejemplo, orden o solución. En este sentido, surge una pregunta muy importante: ¿cómo podemos saber si una ecuación diferencial tiene solución o no? Esta pregunta puede parecer sutil y abstracta, sin embargo, es una pregunta crucial pues, si no hay soluciones, evidentemente, no tiene objeto buscarlas. En caso de que la solución exista, tu práctica como ingeniero te permitirá usar un método analítico o un método numérico para calcular o aproximar la solución, respectivamente. Desafortunadamente, no es posible decir cual de ellos es más conveniente pues ambos pueden llegar a ser muy complejos, más aún, puede suceder que sólo sea posible usar un método numérico.

Para ilustrar mejor esta situación, regresaremos a conocimientos más sencillos. Considera la siguiente expresión $2x^5 - 10x + 5 = 0$. Una solución de esta ecuación algebraica es un valor de x para el cual se tiene una igualdad, en este caso, cero igual a cero. La pregunta es ¿existe tal valor de x?

Si evaluamos en $x = 1$ tenemos que $2(1)^5 - 10(1) + 5 = -3$, es decir, un valor negativo. Evaluando en $x = -1$ tenemos $2(-1)^5 - 10(-1) + 5 = 13$, que es un valor positivo. Como los polinomios son funciones continuas, debe haber un punto entre $x = -1$ y $x = 1$ en el que el polinomio vale cero. Hemos establecido entonces la existencia de por lo menos un valor de x para el que el polinomio $2x^5 - 10x + 5$ es igual a cero, es decir, hemos probado que la ecuación $2x^5 - 10x + 5 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 1)$, pero, ¿cuál es este valor de x? Hay técnicas numéricas para calcularlo con tanta precisión como se quiera, pero hay toda una elaborada teoría matemática que nos asegura que no hay una "fórmula" (como por ejemplo para las ecuaciones segundo grado) que pueda expresar dicha solución. Con esto, podemos asegurar que la ecuación $2x^5 - 10x + 5 = 0$ tiene al menos una solución pero no podemos expresar dicha solución de forma analítica.

Con las ecuaciones diferenciales sucede algo parecido. Si nos dan el problema de condición inicial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ podemos preguntarnos si existe una solución para este problema. Puede suceder que podamos responder a esta cuestión sin saber cómo calcular dicha solución. De hecho, el problema de existencia de soluciones de problemas de condiciones iniciales se ha estudiado ampliamente y se han obtenido muy buenos resultados dando lugar a teoremas que garantizan la existencia de soluciones bajo determinadas hipótesis. Estableceremos el teorema estándar de existencia de soluciones sin demostración.

Teorema de Existencia: *Sea el problema de condiciones iniciales* $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $y(x_0) = x_0$. *Supongamos que* $f(x,y)$ *es una función continua en un rectángulo de la forma* $\{(x,y)|a < x < b,\ c < y < d\}$ *en el plano* $\mathbb{R}^2$. *Si* (x_0, y_0) *es un punto en este rectángulo, entonces existe un* $\varepsilon > 0$ *y una función* $y(x)$ *definida en* $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ *que es solución al problema de condiciones iniciales.*

Este teorema garantiza la existencia de soluciones para problemas de condiciones iniciales siempre que la función $f(x,y)$ sea continua. Esto no significa que no puedan existir soluciones incluso cuando $f(x,y)$ no es continua, pero nadie lo garantiza. Incluso cuando existen soluciones, si se lee el teorema con atención, se observa que el intervalo en el que dichas soluciones pueden estar definidas puede ser extremadamente pequeño. El teorema asegura que la posible solución tiene un dominio de definición igual a $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para un cierto $\varepsilon > 0$.

Teorema de existencia: ejemplo. Consideremos el siguiente problema de condición inicial $\frac{dy}{dx} = 15(1 + y^2)$, $y(0) = 0$. La solución general de la ecuación diferencial, que podrá ser calculada con métodos vistos más adelante, es $y(x) = \tan(15x + C)$, donde C es una constante arbitraria. Usando la condición inicial $0 = y(0) = \tan(0 + C)$ encontramos que $C = 0$ ó $C = n\pi$ (para cualquier entero n). Así que la solución particular es $y(x) = \tan(15x)$. Ahora debemos observar cuál es el intervalo de existencia de esta función. Sabemos que $\tan(x)$ tiende a $+\infty$ si x tiende a $\frac{\pi}{2}$ y a $-\infty$ si x tiende a $-\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, el intervalo de existencia de esta función es $\left(-\frac{\pi}{30}, \frac{\pi}{30}\right)$. Un intervalo muy pequeño porque $\frac{\pi}{30} \approx 0{,}1$.

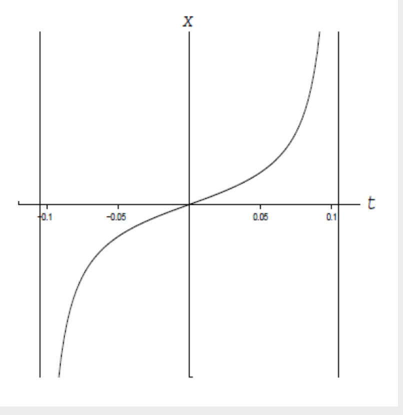


Figura 2: Gráfica de la solución $y(x) = \tan(15x)$ para el problema de condiciones iniciales $\frac{dy}{dx} = 15(1 + y^2)$, $y(0) = 0$. Cuando x tiende a $\frac{\pi}{30}$ por la derecha, $y(x)$ tiende a $+\infty$. Y cuando x tiende a $-\frac{\pi}{30}$ por la izquierda, $y(x)$ tiende a $-\infty$.

Al hablar de la solución del problema de condiciones iniciales no nos hemos preguntado ¿cómo sabemos que dicha solución es única? Saber que la solución de un problema de condiciones iniciales es única es de suma importancia, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Si no supiéramos que la solución es única, deberíamos preocuparnos por encontrar todas las soluciones posibles. Desde el punto de vista de la formulación de ecuaciones diferenciales para aplicaciones en ingeniería, si la solución de un problema de condiciones iniciales no fuera única, las predicciones del modelo no serían tampoco únicas. En otras palabras, nunca podríamos estar seguros del comportamiento del fenómeno bajo estudio.

Existe un teorema muy importante que asegura que, bajo hipótesis muy amplias, las soluciones de los problemas de condiciones iniciales existen y son únicas. Este teorema se presenta sin demostración.

Teorema de unicidad: *Sea el problema de condiciones iniciales* $\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = x_0$. *Sean* $f(x, y)$ *y* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *funciones continuas en un rectángulo de la forma* $\mathcal{R} = \{(x, y)|a < x < b, c < y < d\}$. *Si* $(x_0,\ y_0)$ *es un punto en este rectángulo y si* $y_1(x)$ *y* $y_2(x)$ *son dos soluciones del problema de condiciones iniciales, entonces* $y_1(x) = y_2(x)$ *para todos los valores de* x *para los que* $(x, y_1(x)), (x, y_2(x)) \in \mathcal{R}$. *En otras palabras, la solución del problema es única.*

Teorema de unicidad: ejemplo. Sea el problema de condiciones iniciales $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3},\ y(1) = 0$. Una solución general de la ecuación diferencial dada es $y(x) = (x + C)^3$. Sustituyendo las condiciones iniciales, obtenemos $y(1) = (1 + C)^3 = 0 \to C = -1$. Por tanto, $y(x) = (x - 1)^3$ es una solución particular al problema de condiciones iniciales. Sin embargo, la función $y(x) \equiv 0$ es también una solución que satisface las condiciones iniciales, entonces, ¿la solución no es única? No es posible asegurar que la solución sea única porque, aunque $f(x, y) = 3y^{2/3}$ es continua $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \dfrac{2}{y^{1/3}}$ no existe en $y = 0$.

1.5. Ecuaciones diferenciales de variables separables.

En secciones anteriores, reescribimos la ecuación diferencial de primer orden más general como $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, es decir, la ecuación (2). Si es posible expresar (2) como

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy, \tag{4}$$

se dice que la ecuación diferencial es de **variables separables** cuya **forma diferencial** está definida por

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \tag{5}$$

donde $M(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ y $N(y) = -\frac{g_1(y)}{g_2(y)}$. Ahora, la expresión (5) se puede integrar directamente de la siguiente forma

$$\int_{x_0}^{x} M(s)\ ds + \int_{y_0}^{y} N(s)\ ds = 0,$$

gracias al Teorema fundamental del cálculo. Si existen funciones $m(x)$ y $n(y)$ tales que $\frac{dm(x)}{dx} = M(x)$ y $\frac{dn(y)}{dy} = N(y)$, entonces, el resultado de las integrales es

$$m(x) - m(x_0) + n(y) - n(y_0) = 0.$$

Dado que $m(x_0)$ y $n(y_0)$ están relacionadas con las condiciones iniciales, ambas representan valores que pueden reducirse a una sola constante esencial, por tanto

$$m(x) + n(y) = C, \tag{6}$$

es la solución general de (5), donde C es una constante arbitraria.

Ecuaciones diferenciales de variables separables: ejemplo. Resuelva la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - x^3}{4 + y^3}$ y grafique algunas de las curvas solución. Además, encuentre la solución particular que satisface la condición $y(0) = 1$.
Solución.
Reescribiendo la ecuación diferencial como $(4 + y^3)\ dy = (4x - x^3)\ dx$, notamos que cumple la forma requerida por la expresión (4). Entonces, podemos integrar ambas partes (del lado izquierdo respecto de y y del lado derecho respecto de x), esto resulta en

$$\int (4 + y^3)\ dy = \int (4x - x^3)\ dx,$$

$$4y + \frac{1}{4}y^4 + C_1 = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C_2,$$

$$4y + \frac{1}{4}y^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x^4 = C, \tag{7}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración y $C = C_2 - C_1$. Sustituyendo la condición $y(0) = 1$ en (7)

$$4(1) + \frac{1}{4}(1)^4 - 2(0)^2 + \frac{1}{4}(0)^4 = C \Rightarrow C = \frac{17}{4}.$$

La solución particular, escrita como una **solución implícita**, pues no es posible despejar y como función de x, es

$$4y + \frac{1}{4}y^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{17}{4}.$$

Las gráficas de algunas curvas solución se encuentran en la Figura 3.

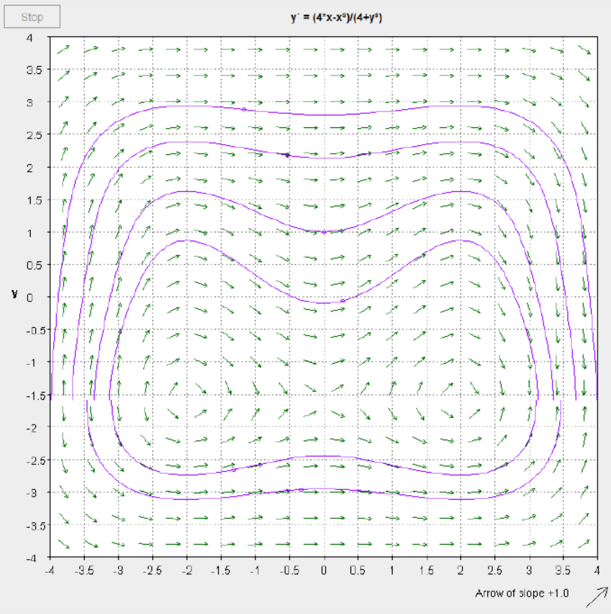


Figura 3: Curvas solución de la ecuacion diferencial del ejemplo sobre ecuaciones diferenciales con variables separables.

Ecuaciones diferenciales con variables separables: una aplicación al modelado de un cuerpo en caída libre. La deducción de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un cuerpo en caída libre se basa en la segunda ley de Newton considerando la acción de la fuerza de gravedad y el peso del cuerpo en cuestión. Si no se considera la fricción con el aire, la ecuación que corresponde al modelo es

$$m\frac{dv}{dt} = mg, \tag{8}$$

donde m denota la masa, $g = 9{,}8m/s^2$ es la aceleración gravitacional, $v = v(t)$ define la velocidad del cuerpo (variable dependiente) y, finalmente, t denota al tiempo (variable independiente).

Si, tratando de ser más precisos, consideramos que la fuerza fricción con el aire $F_f(t)$ es proporcional a la velocidad, es decir, si $F_f(t) = F_f(v(t)) = -k_1v(t)$, donde el signo menos denota oposición al movimiento del cuerpo y k_1 es un coeficiente de fricción, el modelo obtenido es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k_1v. \tag{9}$$

Algunos experimentos sugieren que la manera más aproximada de considerar a la fuerza de fricción es modelarla como una función lineal del cuadrado de la velocidad, esto es, $F_f(v(t)) = -k_2v^2(t)$, donde k_2 es un coeficiente de fricción distinto a k_1. La ecuación diferencial apropiada para describir este caso es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k_2v^2. \tag{10}$$

A continuación, nuestro propósito es encontrar las soluciones generales para cada modelo con el objetivo de describir, en cada caso, la velocidad como función del tiempo t.

La ecuación (8) puede ser escrita como $dv = gdt$ la cual es de variables separables pues tiene la forma dada en (4). Integrando de ambos lados y reduciendo las constantes no esenciales, obtenemos la solución general $v(t) = gt + C$, donde C es la constante de la familia de las curvas solución (líneas rectas). Físicamente, esta solución indica que el cuerpo cae con una velocidad independiente de su masa y proporcional al tiempo que permanece en el aire. Si el tiempo tiende a infinito, la velocidad tiende a infinito lo cual es energéticamente imposible.

Consideremos ahora el modelo (9). Esta ecuación diferencial también puede ser llevada a la forma (4) pues m y g son constantes, esto es, reescribiendo (9) como

$$\frac{m}{mg - k_1 v}\, dv = dt,$$

es claro que se trata de una ecuación diferencial de variables separables. Integrando de ambos lados de la igualdad, resulta

$$-\frac{m}{k_1}\ln|mg - k_1 v| = t + C,$$

donde, nuevamente, C es una constante de integración. Encontrando una **solución explícita** de la ecuación diferencial, lo cual se logra despejando la variable dependiente, en este caso $v(t)$, obtenemos

$$v(t) = \frac{mg}{k_1} + \frac{C_1}{k_1}\, e^{\left(-\frac{k_1}{m}t\right)}\ , \quad C_1 = -e^{-\frac{k_1}{m}C}. \tag{11}$$

De la expresion (11) se observa que existe una relación exponencial negativa entre la velocidad y el tiempo. Además, la velocidad terminal, es decir la velocidad que se alcanza cuando t tiende a infinito, resulta una constante dada por

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) \to v_\infty = \frac{mg}{k_1}\ ,$$

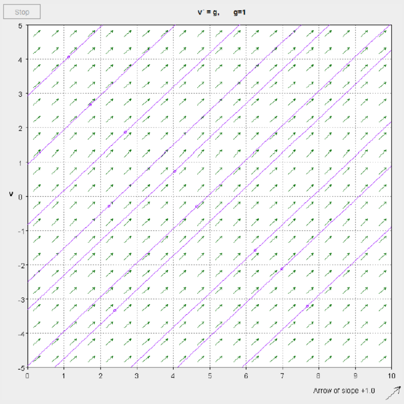
que es, físicamente, más razonable.

Para la ecuación diferencial (10), la separación de variables tiene la siguiente forma

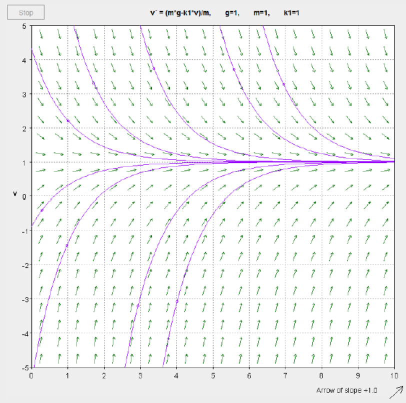
$$\frac{m}{mg - k_2 v^2}\, dv = dt,$$
$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{mg}{k_2}} - v\right)\left(\sqrt{\frac{mg}{k_2}} + v\right)} dv = \frac{k_2}{m} dt,$$

donde una factorización de binomio conjugado fue usada en la última expresión. Resolviendo la integral de la izquierda por fracciones parciales y encontrando una solución explícita, llegamos a

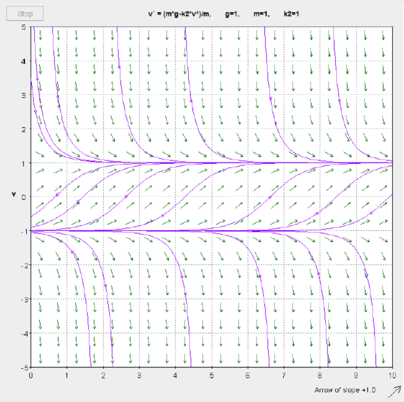
$$v(t) = tanh\left(\frac{\sqrt{mgk_2}(C+t)}{m}\right)\frac{\sqrt{mgk_2}}{k_2}.$$



(a) Caso sin fricción



(b) Fricción proporcional a $v(t)$



(c) Fricción proporcional a $v^2(t)$

Figura 4: Curvas solución para un cuerpo en caída libre considerando los diferentes modelos para la fricción.

Las curvas solución para los diferentes tipos de fricción se muestran en la Figura 4. Es posible observar tres distintos comportamientos: para el primer caso, la velocidad crece sin límites de forma lineal. Para el segundo se puede ver que, independientemente del punto donde la curva solución comience (condición inicial) la masa tendrá una velocidad final (terminal) igual a una constante, esto describe, por ejemplo, el comportamiento de un paracaidista en caída libre. Finalmente, para el tercer caso, se observa una velocidad terminal, pero distinta a la calculada por el modelo anterior. Analizando las curvas solución se puede inferir que para ciertas velocidades iniciales, se tendrá una velocidad terminal positiva, sin embargo para algunas velocidades iniciales negativas, la velocidad final aumenta sin límites. Para este último caso el concepto de velocidad de escape se hace presente.

Como último punto en esta sección, analizaremos como una ecuación diferencial, aparentemente no separable, puede ser transformada en una de ese tipo mediante un cambio de variable.

Ecuaciones diferenciales de variables separables: ejemplo con cambio de variable. La ecuación diferencial ordinaria $\frac{dy}{dx} = tan^2(x+y)$ es, aparentemente, no separable, sin embargo, el cambio de variable $u = x + y$ permite escribir la ecuación en forma separable. Es decir, si definimos $u = x + y$, por derivación de ambos lados de esta expresión respecto a la variable independiente x, tenemos $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$. Lo que deseamos es reescribir la variable $y(x)$ en términos de $u(x)$, es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1.$$

Sustituyendo lo anterior, la ecuación diferencial queda $\frac{du}{dx} = tan^2(u) + 1$, es decir,

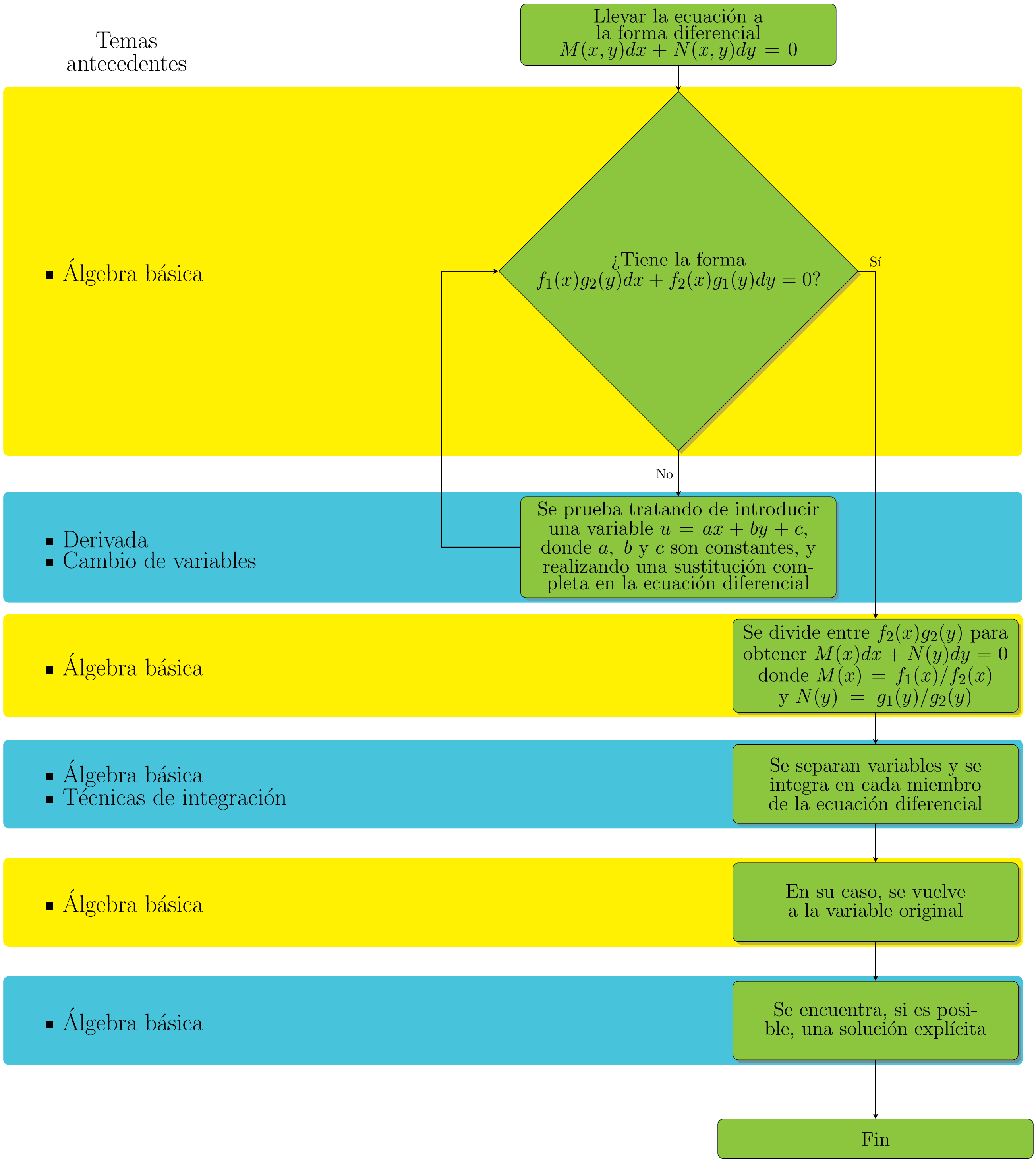
$$\frac{du}{dx} = sec^2(u) \ ,$$

que es separable según la ecuación (4). Resolviendo la ecuación separando variables e integrando de ambos lados, tenemos $cos^2(u)du = dx \Rightarrow \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}sen(2u) = x + C$. Regresando a las variables originales y y x, tenemos la solución implícita

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4}sen(2(x+y)) = x + C.$$

Conocimientos antecedentes y solución de ecuaciones diferenciales separables

Academia de Ecuaciones Diferenciales



1.6. Ecuaciones diferenciales homogéneas.

Para comenzar con el estudio de este tipo de ecuaciones, debemos conocer el concepto de función homogénea de grado n . Se dice que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado n si[1]

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \tag{12}$$

Función homogénea de grado n: ejemplos Sea la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Deseamos investigar si es homogénea y de qué grado. Si realizamos las sustituciones: $x \to tx$ y $y \to ty$ y evaluamos en la función, obtendremos $f(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(x^2 + xy + y^2) = t^2 f(x, y)$. Por tanto, $f(x, y)$ es una función homogénea de grado 2.

Sea la función $g(x, y) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$. Realizando el siguiente cálculo: $g(tx, ty) = tx + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = tx + t\sqrt{x^2 + y^2} = t\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = t\ g(x, y)$, encontramos que la función $g(x, y)$ es homogénea de grado 1.

Consideremos ahora $h(x, y) = 5 + \frac{y}{x}$. Realizando la sustitución correspondiente obtenemos $h(tx, ty) = 5 + \frac{ty}{tx} = 5 + \frac{y}{x} = t^0 h(x, y)$. Por tanto es una función homogénea de grado 0.

Finalmente, consideremos $l(x, y) = x^2 + y$. Realizando la evaluación $l(tx, ty) = t^2x^2 + ty$, resulta que no podemos obtener algo de la forma $l(tx, ty) = t^n l(x, y)$ para ningún valor de n. Por tanto, $l(x, y)$ no es función homogénea de grado n.

Se dice que la forma diferencial de una ecuación diferencial dada por

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

es de **coeficientes homogéneos** si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos siempre puede transformarse en una ecuación de variables separables usando alguna de las sustituciones $y = ux$ ó $x = vy$, donde u y v son nuevas variables dependientes.

Ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos: ejemplos Resuelve la ecuación diferencial $(x - y)dx - (x + y)dy = 0$.
Solución: La ecuación diferencial dada no es separable y tampoco sugiere algún cambio de variable adecuado que la haga de ese tipo. Investigaremos si los coeficientes de esa forma diferencial son funciones homogéneas y de qué grado.

$$M(x, y) = x - y \ \Rightarrow \quad M(tx, ty) = tx - ty = t(x - y) = t\ M(x, y),$$

$$N(x, y) = x + y \ \Rightarrow \quad N(tx, ty) = t(x + y) = t\ N(x, y).$$

Por lo tanto, $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de grado 1 y, como consecuencia, la ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos. Proponemos el cambio de variable $y = ux$ y el correspondiente cambio de diferenciales $dy = udx+xdu$ el cual tiene su origen en la expresión $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Sustituyendo lo anterior en la ecuación diferencial, resulta

$$(x - ux)dx - (x + ux)(udx + xdu) = 0.$$

[1] En algunos libros, se dice que es de *grado* k y en lugar de t usan λ.

Reduciendo términos semejantes, obtendremos

$$x(1-2u-u^2)dx - x^2(1+u)du = 0,$$

que es una ecuación diferencial separable en las variables x y u. Siguiendo el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones visto en la sección 1.5, integramos

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\, du,$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2u-u^2) + C_1,$$

$$2ln(x) + ln(1-2u-u^2) = 2C_1,$$

$$ln(x^2) + ln\left(1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) = 2C_1,$$

$$ln\left[x^2\left(\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2}\right)\right] = 2C_1,$$

$$x^2 - 2xy - y^2 = C\ ;\quad C = e^{2C_1}.$$

Una segunda manera de resolver la misma ecuación diferencial es mostrada a continuación. Reescribamos la ecuación diferencial y multipliquemos numerador y denominador por $\frac{1}{x}$. Esto resulta en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}.$$

Se propone la misma sustitución que anteriormente, $y = ux$, con el correspondiente cambio de diferenciales $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Realizando un cambio global en términos de las variables u y x, llegamos a

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u},$$

que es separable, de tal manera que obtendremos

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{1-2u-u^2}\, du,$$

llegando, nuevamente, a $x^2 - 2xy - y^2 = C$.

Como segundo ejemplo, resolvamos el siguiente problema de condiciones inciales $ydx - \left(x + ye^{x/y}\right)dy = 0\ ,\ \ y(1) = 1.$
Solución: Reexpresando la forma diferencial dada como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + e^{x/y},$$

es notorio el cambio de variable adecuado, es decir, $x = vy$ (o $v = \frac{x}{y}$), con su correspondiente derivada $\frac{dx}{dy} = v + y\,\frac{dv}{dy}$. Para corroborar que la ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos calculamos

$$M(x,y) = y \to M(tx,ty) = ty = tM(x,y),$$
$$N(x,y) = -x - ye^{\frac{x}{y}} \to N(tx,ty) = -\,tx - tye^{\frac{tx}{ty}} = tN(x,y),$$

y por tanto ambos coeficientes son funciones homogéneas del mismo grado ($n = 1$). Reescribiendo la ecuación diferencial en términos de v y y, tenemos

$$v + y\,\frac{dv}{dy} = v + e^v,$$

que es separable. Siguiendo el proceso de solución de ecuaciones diferenciales de variables separables, integramos

$$\int e^{-v}dv = \int \frac{dy}{y},$$

y obtenemos

$$-e^{-v} = ln(y) + C.$$

Regresando a las variables originales x y y, se llega a

$$-e^{-x/y} = ln(y) + C,$$

que es la solución general de la ecuación diferencial. Para obtener la solución particular, usamos las condiciones iniciales, es decir, $y(1) = 1$

$$-e^{-1} = ln(1) + C \Rightarrow C = -e^{-1}.$$

Entonces la solución particular es $ln(y) + e^{-x/y} - e^{-1} = 0$.

Como tercer ejemplo, considera encontrar la solución particular del problema de condiciones iniciales

$$-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0,\ y(0) = 1.$$

Solución: Ningún cambio de variable es sugerido por la ecuación diferencial así que probemos con $x = vy$ y su derivada escrita en términos de las diferenciales $dx = vdy + ydv$. Realizando un cambio global de variables, tenemos

$$-y(vdy + ydv) + \left(vy + \sqrt{vy^2}\right) dy = 0.$$

Agrupando términos

$$\left(-yv + vy + y\sqrt{v}\right) dy - y^2dv = 0,$$

y reduciendo algebráicamente, se obtiene

$$y\sqrt{v}dy = y^2dv,$$

que es una ecuación diferencial de variables separables. Realizando las integrales

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dv}{\sqrt{v}},$$

obtenemos

$$ln(y) = 2\sqrt{v} + C_1,$$

que, en términos de las variables originales x y y, es

$$ln(y) = 2\sqrt{\frac{x}{y}} + C_1.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y = Ce^{2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)},\ C = e^{C_1}.$$

Para encontrar la solución particular al problema de condiciones iniciales, usamos la información $y(0) = 1$, lo que resulta en $C = 1$. Así, la solución particular requerida es $y = e^{2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)}$.

1.6.1. Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales.

Existen un tipo de ecuaciones diferenciales que, aunque no tienen coeficientes homogéneos, pueden ser transformadas en ecuaciones con esa característica mediante una modificación particular.

Considera la siguiente forma diferencial cuyos coeficientes no son homogéneos

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0, \tag{13}$$

donde a_i, b_i y c_i, $i = 1, 2$, son constantes y $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Es claro que el principal obstáculo para que (13) tenga coeficientes homogéneos es la presencia de los términos independientes c_1 y c_2. Una estrategia para eliminarlos es cambiar las variables a un nuevo plano $u - v$ cuyo origen sea la intersección de las rectas definidas por los coeficientes lineales de (13). De esta manera, los términos independientes no existen en el sistema de referencia $u - v$ y la ecuación tiene coeficientes homogéneos en ese espacio.

Para explicar esta transformación con más detalle, consideremos que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

tiene solución única dada por h y k. Si realizamos una traslación de ejes mediante la sustitución

$$\begin{aligned} x &= u + h, \\ y &= v + k, \end{aligned}$$

donde u y v son nuevas variables dependientes, la ecuación (13) se transformará en una con coeficientes homogéneos en el espacio $u - v$. A continuación se muestra un ejemplo concreto.

Ecuaciones diferenciales de coeficientes lineales: ejemplos. La ecuación diferencial

$$(-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0, \tag{15}$$

no tiene coeficientes homogéneos pero podemos transformarla en una de ese tipo como sigue. Consideremos el sistema conformado por los coeficientes lineales de la ecuación diferencial (15)

$$\begin{cases} -3x + y + 6 = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $h = 1$ y $k = -3$. Realizando la sustitución

$$\begin{aligned} x &= u + 1, \quad dx = du, \\ y &= v - 3, \quad dy = dv, \end{aligned}$$

la ecuación (15) cambia a

$$(-3(u+1) + v - 3 + 6)\, du + (u + 1 + v - 3 + 2)\, dv = 0,$$

que, expresado de manera más simple, es

$$(-3u + v)du + (u + v)dv = 0, \tag{16}$$

la cual es una forma diferencial con coeficientes homogéneos en las nuevas variables u y v. Siguiendo el procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos desarrollado en la sección 1.6, proponemos $v = zu$ con el correspondiente cambio en las diferenciales dado por $dv = zdu + udz$. Sustituyendo lo anterior en la ecuación diferencial (16) obtenemos

$$(-3u + zu)du + (u + zu)(zdu + udz) = 0,$$

reduciendo términos apropiadamente llegamos a

$$u(-3 + 2z + z^2)du + u^2(1 + z)dz = 0,$$

y dividiendo entre u^2

$$\frac{1}{u}(-3 + 2z + z^2)du + (1 + z)dz = 0.$$

La anterior es una ecuación diferencial de variables separables que se resuelve con el método desarrollado en la sección 1.5, es decir. integrando en ambos miembros

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{1 + z}{-3 + 2z + z^2}\, dz,$$

$$ln(u) = -\frac{1}{2}\, ln(-3 + 2z + z^2) + C_1.$$

Regresando a las variables u y v y eliminando el denominador 2, se obtiene

$$2\, ln(u) = -ln\left(-3 + 2\frac{v}{u} + \left(\frac{v}{u}\right)^2\right) + 2C_1.$$

Usando leyes de logaritmos, la expresión anterior se reduce a

$$ln\left(u^2\left(\frac{-3u^2 + 2uv + v^2}{u^2}\right)\right) = 2C_1,$$

que, aplicando la función exponencial en ambos miembros, resulta en

$$-3u^2 + 2uv + v^2 = C \quad ; \quad C = e^{2C_1}$$

Finalmente, debemos reexpresar la solución en términos de las variables originales x y y, con lo que la solución final es

$$-3(x-1)^2 + 2(x-1)(y+3) + (y+3)^2 = C.$$

Eliminar los términos independientes de los coeficientes de la ecuación diferencial es una estrategia adecuada cuando el sistema (14) tiene solución única. Sin embargo, un cambio de variables también es apropiado cuando este sistema no tiene solución. Un ejemplo muestra el procedimiento a seguir en este caso.

Ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales: un ejemplo en caso de que la solución al sistema de ecuaciones no exista. Considera la ecuación diferencial

$$(x - 2y + 3)dx + (3x - 6y + 4)dy = 0, \tag{17}$$

que no es de coeficientes homogéneos debido a los términos independientes 3 y 4.
En este caso, el sistema

$$\begin{aligned} h - 2k + 3 &= 0, \\ 3h - 6k + 4 &= 0, \end{aligned}$$

no tiene solución. Sin embargo, la propia ecuación (17) sugiere el cambio de variable $u = x - 2y$ con el correspondiente cambio en el diferencial $du = dx - 2dy$. Realizando la sustitución, tenemos

$$(u + 3)(du + 2dy) + (3u + 4)dy = 0,$$

operando algebraicamente, se obtiene

$$(2u + 6 + 3u + 4)dy + (u + 3)du = 0,$$

es decir,

$$(5u + 10)dy + (u + 3)du = 0,$$

que es una ecuación diferencial separable. Siguiendo el proceso de solución de ecuaciones diferenciales separables, integramos

$$\int dy = -\frac{1}{5}\int \frac{u+3}{u+2}\, du \to \int dy = -\frac{1}{5}\int \left(1 + \frac{1}{u+2}\right) du.$$

Al aplicar el operador indicado, resulta

$$5y + u + ln(u + 2) = C.$$

Regresando a las variables originales x y y, obtenemos

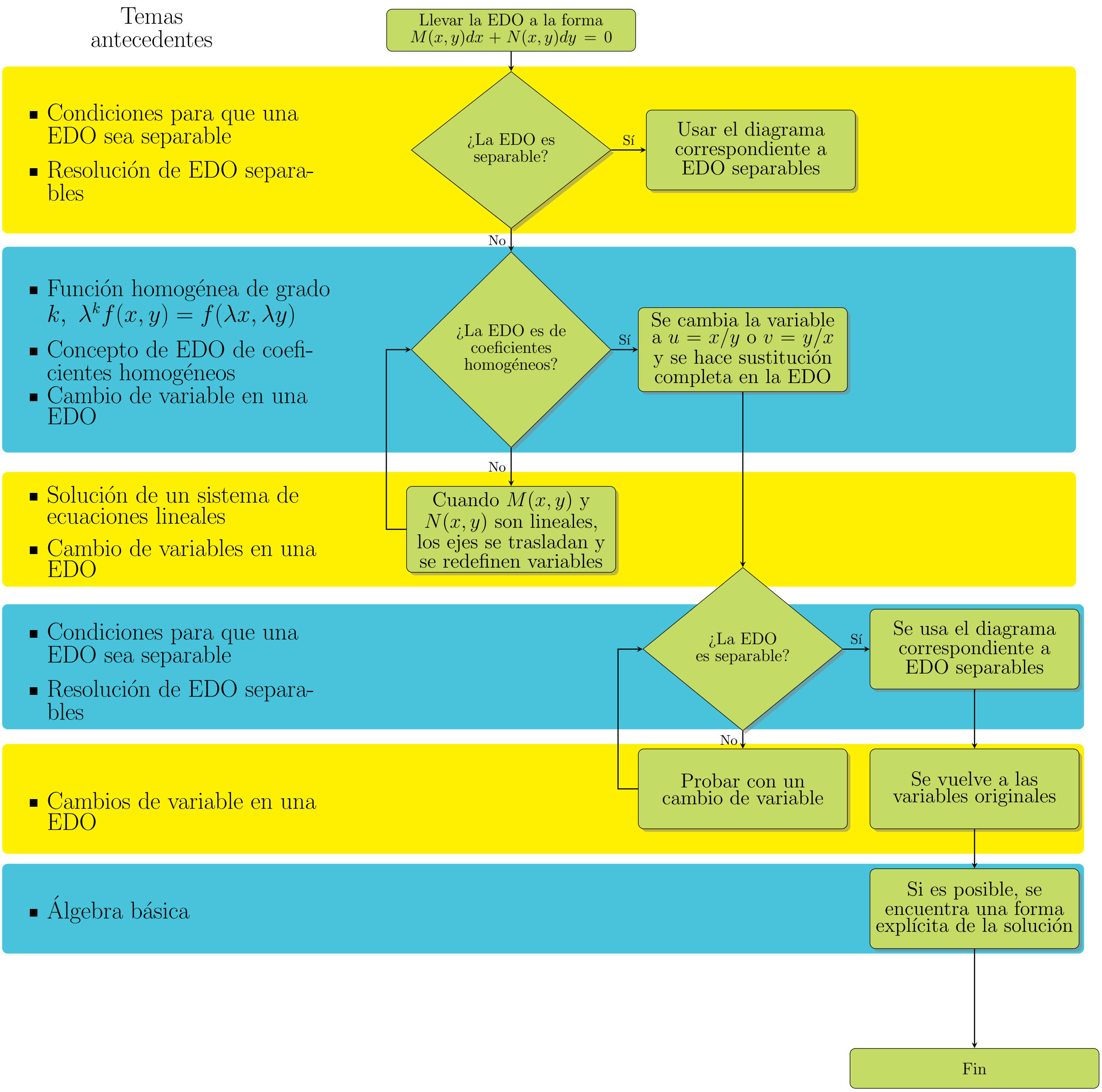
$$5y + x - 2y + ln(x - 2y + 2) = C,$$

con lo que la solución general es

$$x + 3y + ln(x - 2y + 2) = C.$$

Antecedentes y solución de ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos

Academia de Ecuaciones Diferenciales



1.7. Ecuaciones diferenciales exactas

Considera la siguiente función de dos variables independientes

$$u(x,y) = C_1, \tag{18}$$

donde C_1 es constante. La diferencial total du de la función (18) queda dada por

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\, dy = 0. \tag{19}$$

Bajo las definiciones

$$M(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad , \quad N(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \tag{20}$$

la ecuación (19) se transforma en una forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{21}$$

que dará lugar a las ecuaciones diferenciales exactas.

Si las funciones dadas en (20) son continuas, el Teorema de Schwartz garantiza que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \tag{22}$$

pues las derivadas mixtas son idénticas.

En ecuaciones diferenciales, el análisis anterior se aplica cuando se quiere encontrar una solución de la ecuación diferencial (21). Si, para la ecuación diferencial dada, se verifica la condición (22) entonces la forma diferencial proviene de una diferencial total como la dada en (19) y el problema de calcular la solución se reduce a encontrar la función $u(x,y) = C_1$ que dio lugar a esa forma diferencial.

Como definición, a cualquier ecuación diferencial como la dada en (21) que cumpla la condición (22) se le llama **ecuación diferencial exacta** pues proviene de una diferencial total y su solución será una función del tipo (18).

Ecuaciones diferenciales exactas: ejemplos. Resuelve la ecuación diferencial

$$2xy\ dx + (1+x^2)dy = 0.$$

Solución. En primer lugar, se debe verificar si se trata de una ecuación diferencial exacta. Con este fin, y de acuerdo a las definiciones (20), identificamos $M(x,y) = 2xy$ y $N(x,y) = 1 + x^2$. En seguida, con base en (22), calculamos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

y, por tanto, la ecuación diferencial dada es exacta.
Lo anterior implica que existe una solución del tipo (18) y el procedimiento para encontrarla se describe a continuación. Según las definiciones (20), la función $u(x,y)$ debe ser tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad , \quad N(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1 + x^2. \tag{23}$$

Entonces, tenemos dos caminos para encontrar la solución: integrar $M(x, y)$ respecto a x o integrar $N(x, y)$ respecto a y. Aunque cualquiera de ellos es posible, siempre es recomendable tomar aquél que involucre la integral más sencilla. Tomemos en primer lugar

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy \rightarrow \partial u(x,y) = 2xy \ \partial x,$$

que al integrar, resulta en

$$\int \partial u(x,y) = \int 2xy \ \partial x = \frac{2x^2y}{2} + h(y) = u(x,y).$$

En resumen, salvo la determinación de la función incógnita $h(y)$, la solución $u(x, y)$ debe expresarse como

$$u(x,y) = x^2y + h(y). \tag{24}$$

Por otro lado, sabemos que la derivada parcial de (24) con respecto a y debe ser igual a la función $N(x, y) = 1 + x^2$. Realizando esto sobre (24), obtenemos

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^2 + h'(y), \tag{25}$$

que debe satisfacer

$$x^2 + h'(y) = 1 + x^2 = N(x,y).$$

De lo anterior, concluimos que $h(y) = y + C_2$. Sustituyendo la información obtenida hasta ahora, podemos expresar la solución como

$$u(x,y) = x^2y + y = C, \tag{26}$$

donde $C = C_1 - C_2$ y C_1 la constante de la función (18).

Si tomamos el camino de la integración de $N(x, y)$ respecto a y, obtendremos

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1 + x^2 \rightarrow \partial u(x,y) = (1 + x^2)\partial y,$$

que integrando, resulta

$$\int \partial u(x,y) = \int (1 + x^2)\partial y = y + x^2y + g(x) = u(x,y).$$

Derivando lo anterior, pero en esta ocasión respecto a x

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy + g'(x),$$

que, al igualarlo a $M(x, y) = 2xy$, nos indica que $g'(x) = 0$, entonces, $g(x) = C_2$.

Calculando la solución definitiva con base en lo obtenido, llegamos a la misma respuesta que la dada en (26), lo que era de esperase pues la solución debe ser independiente del proceso por el cual se obtuvo.

1.7.1. Factor integrante

Ciertas ecuaciones diferenciales pueden fallar en la verificación del criterio (22) y, como consecuencia, no son exactas. Sin embargo, un gran número de ellas permiten diseñar alguna función $g(x)$ tal que

$$\frac{\partial g(x)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x)N(x,y)}{\partial x}, \tag{27}$$

o bien, $h(y)$ que satisfaga

$$\frac{\partial h(y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(y)N(x,y)}{\partial x}. \tag{28}$$

Aunque se han propuesto funciones exclusivas de x o y, no se excluye la posibilidad de que exista una función de la forma $q(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial q(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)N(x,y)}{\partial x}.$$

Este tipo de factores son estudiados por una teoría más general que queda fuera de los alcances de este curso.

Para investigar qué forma tiene la función $h(y)$, tomemos la ecuación (28) y desarrollemos las derivadas en ambos miembros de la ecuación, en otras palabras, de manera extensa, (28) es igual a

$$h(y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + M(x,y)\frac{\partial h(y)}{\partial y} = h(y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} + N(x,y)\frac{\partial h(y)}{\partial x}.$$

Considerando que $\frac{\partial h(y)}{\partial y} = h'(y)$ y $\frac{\partial h(y)}{\partial x} = 0$, tenemos

$$h(y)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = -M(x,y)h'(y).$$

Solo en caso de que la expresión anterior dependa *únicamente* de la variable y, lo cual es factible en una gran variedad de ecuaciones, tendremos una ecuación diferencial separable que es posible reagrupar de la siguiente manera

$$\frac{dh(y)}{h(y)} = \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)}dy, \tag{29}$$

donde se ha usado la notación de subíndices para las derivadas parciales.

Resolviendo la ecuación (29) con los métodos descritos en la sección 1.5, tenemos

$$\int \frac{dh(y)}{h(y)} = \int \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)}dy.$$

Integrando el miembro izquierdo, resulta

$$ln|h(y)| = \int \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)}dy.$$

Finalmente, despejando la función deseada $h(y)$

$$h(y) = e^{\displaystyle\int \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)} dy}, \tag{30}$$

que se denomina el **factor integrante en términos de la variable *y***.

Para calcular el **factor integrante en términos de *x*** se opera de la misma manera sobre la ecuación (27) considerando que la expresión equivalente a la dada en (29), es decir

$$\frac{dg(x)}{g(x)} = \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} dx,$$

debe ser una función exclusiva de x. Al concluir los cálculos para despejar $g(x)$ obtendremos

$$g(x) = e^{\displaystyle\int \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} dx}. \tag{31}$$

En resumen, si la ecuación diferencial (21) no es exacta, puede multiplicarse por un factor integrante adecuado, sea el dado en (30) o en (31), para lograr satisfacer las condiciones (27) o (28), según corresponda.

Un ejemplo concreto del cálculo del factor integrante para lograr que una ecuación diferencial sea exacta se muestra a continuación.

Factor integrante: ejemplos. Resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\ sen(x).$$

Solución. Como primer paso debemos escribir la ecuación diferencial dada en forma diferencial, lo que resulta en la expresión

$$-\left(x \operatorname{sen}(x) + \frac{2y}{x^2}\right) dx + \frac{1}{x} dy = 0. \tag{32}$$

Definiendo $M(x,y) = -x \operatorname{sen}(x) - \frac{2y}{x^2}$ y $N(x,y) = \frac{1}{x}$ y verificando si la forma diferencial es exacta

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -\frac{2}{x^2}\ , \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \tag{33}$$

concluimos que la ecuación diferencial no es exacta y será necesario buscar un factor integrante.
Para facilitar nuestros cálculos, notamos que $M_y(x,y)$, $N_x(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones de x, por tanto, nuestro factor integrante se obtendrá mediante la fórmula (31).
Sustituyendo las derivadas de la expresión (33) en (31), obtendremos

$$g(x) = e^{\int \frac{-\frac{2}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} dx} = e^{\int \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-ln|x|} = e^{ln|x^{-1}|},$$

y, por lo tanto, el factor integrante es

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Multiplicando el factor integrante por la ecuación (32)

$$-\left(sen(x) + \frac{2y}{x^3}\right)dx + \frac{1}{x^2}dy = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta pues, si se definen las nuevas funciones $M^*(x,y) = -\left(sen(x) + \frac{2y}{x^3}\right)$ y $N^*(x,y) = \frac{1}{x^2}$, tendremos

$$\frac{\partial M^*(x,y)}{\partial y} = -\frac{2}{x^3}\ , \quad \frac{\partial N^*(x,y)}{\partial x} = -\frac{2}{x^3}.$$

En este punto podemos seleccionar la integración que resulte más fácil: integrar $M^*(x,y)$ respecto de x o $N^*(x,y)$ respecto de y. Eligiendo el segundo camino, calculamos

$$u(x,y) = \int \frac{1}{x^2}dy = \frac{y}{x^2} + h(x).$$

Derivando la última expresión respecto a x obtendremos $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -\frac{2y}{x^3} + h'(x)$, que debe ser igual a $M^*(x,y)$, es decir

$$-\frac{2y}{x^3} + h'(x) = -\frac{2y}{x^3} - \mathrm{sen}(x).$$

De esta manera, se llega a que $h(x) = cos(x) + C_2$ y, por tanto, la solución general es

$$\frac{y}{x^2} + cos(x) = C,$$

donde $C = C_1 - C_2$ y C_1 la constante de la solución en (18).

Conocimientos antecedentes y solución de ecuaciones diferenciales exactas

Academia de Ecuaciones Diferenciales

Conocimientos antecedentes

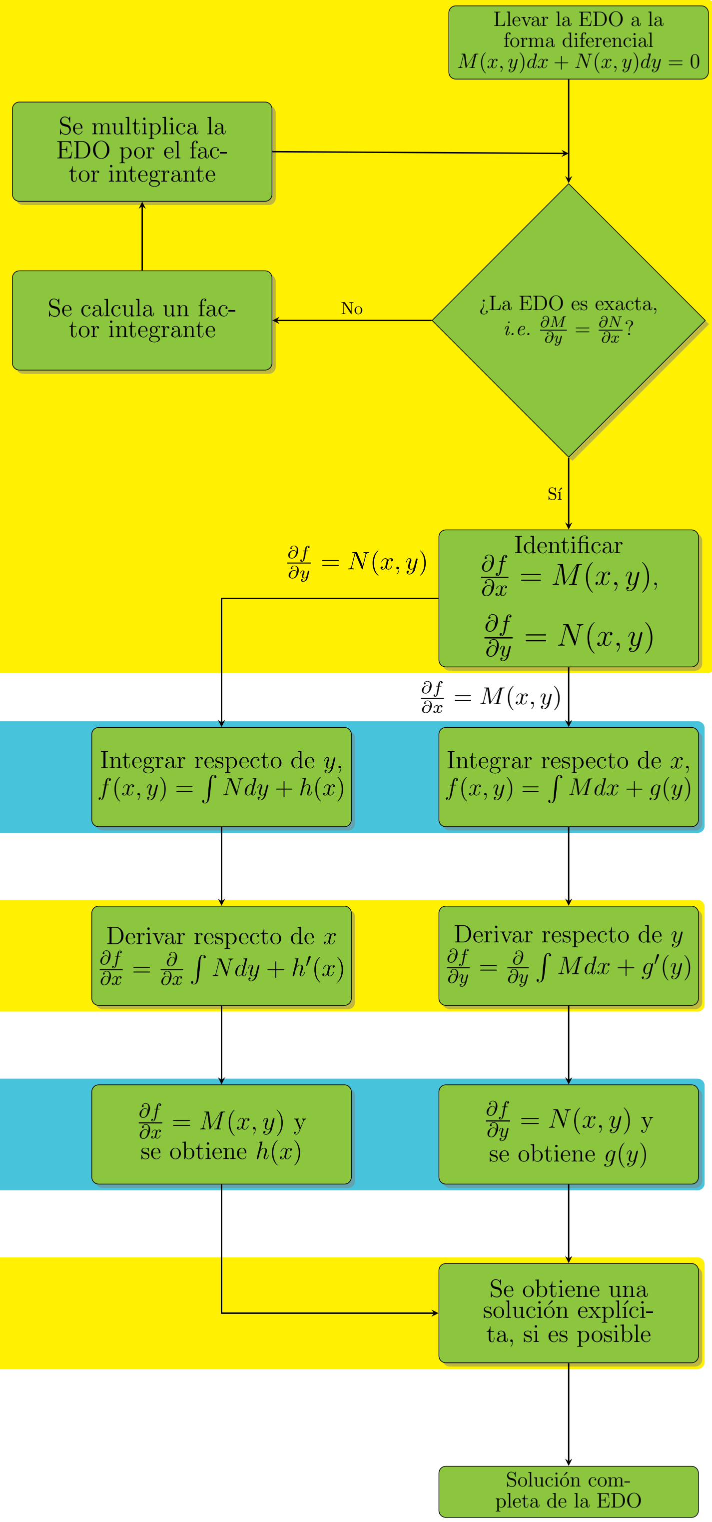
- Forma diferencial de una ecuación diferencial ordinaria (EDO)
- Funciones de dos variables
- Concepto de diferencial total de funciones de dos variables
- Cálculo de derivadas parciales
- Teorema de Schwartz
- Concepto de factor integrante
- Cálculo de factores integrantes de x y y
  - $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$
  - $\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$

- Técnicas de integración

- Cálculo de derivadas parciales

- Concepto de diferencial total
- Técnicas de integración

- Álgebra básica
- Despeje de variables



1.8. Ecuación diferencial lineal de primer orden. Solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. Solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Las ecuaciones diferenciales de primer orden cuya forma particular sea

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{34}$$

donde $p(x) \neq 0$ y $q(x)$ funciones continuas de x, nos ocuparán en esta sección. Si $q(x) = 0$ se dice que la ecuación diferencial es **lineal y homogénea**, mientras que si $q(x) \neq 0$ se dice que la ecuación diferencial es **lineal y no homogénea**.

Multiplicando (34) por dx se tiene

$$dy + p(x)y\ dx = q(x)\ dx,$$

la cual, agrupando términos, es igual a

$$(p(x)y - q(x))\, dx + dy = 0. \tag{35}$$

Para investigar si la ecuación (35) es exacta, tomamos $M(x, y) = p(x)y - q(x)$ y $N(x, y) = 1$ y calculamos las derivadas parciales, es decir

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = p(x)\ , \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0,$$

lo que nos indica que se trata de una ecuación diferencial no exacta y requerirá del cálculo de un factor integrante para encontrar su solución.

Dado que las funciones $M_y(x, y)$, $N_x(x, y)$ y $N(x, y)$ dependen únicamente de x, podemos calcular un factor integrante adecuado mediante la fórmula (31), de la cual se obtiene

$$g(x) = e^{\int p(x)\ dx}; \tag{36}$$

este será el factor integrante que hará que la ecuación diferencial (35) sea exacta.

En efecto, multiplicando (35) por (36), obtenemos

$$e^{\int p(x)dx}\, (p(x)y - q(x))\, dx + e^{\int p(x)dx} dy = 0. \tag{37}$$

Definiendo $M^*(x, y) = e^{\int p(x)dx}\, (p(x)y - q(x))$ y $N^*(x, y) = e^{\int p(x)dx}$, encontramos que

$$\frac{\partial M^*(x,y)}{\partial y} = p(x)e^{\int p(x)dx} = \frac{\partial N^*(x,y)}{\partial x},$$

lo que significa que (37) es una ecuación diferencial exacta. Repitiendo el procedimiento explicado en la sección 1.7.1, tomamos la integral de $N^*(x, y)$ respecto a y, llegando a

$$u(x, y) = ye^{\int p(x)dx} + h(x) = C_1, \tag{38}$$

donde C_1 es la constante de la solución (18). Si (38) se deriva parcialmente respecto a x y se iguala con $M^*(x,y)$, resulta en

$$p(x)ye^{\int p(x)dx} + h'(x) = p(x)ye^{\int p(x)dx} - q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

De esta última igualdad podemos asegurar que

$$h'(x) = -q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow h(x) = -\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (39)$$

Sustituyendo (39) en (38), obtenemos

$$u(x,y) = ye^{\int p(x)dx} - \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = C_1.$$

Finalmente, despejando la variable y para obtener una solución explícita, se llega a

$$y = \underbrace{C_1\ e^{-\int p(x)dx}}_{y_h(x)} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \int\ q(x)e^{\int p(x)dx}\ dx}_{y_p(x)}, \qquad (40)$$

donde las definiciones $y_h(x)$ y $y_p(x)$ denotan partes muy especiales de la solución: si $q(x) = 0$, característica que hace que la ecuación diferencial sea homogénea, la única parte de la solución diferente de cero es $y_h(x)$, la cual, corresponde a la **solución de la ecuación diferencial homogénea asociada** o **solución complementaria**. Si $q(x) \neq 0$, la parte de la solución denominada con $y_p(x)$ dependerá de tal función $q(x)$, es por ello que a esta parte de la solución se le llama **solución particular** de la ecuación diferencial.
Una manera alternativa para resolver la ecuación (34) de forma más sencilla se basa en notar que la ecuación (37) puede escribirse como

$$e^{\int p(x)dx}\,(dy + p(x)y\ dx) = e^{\int p(x)dx}q(x)\ dx,$$

$$e^{\int p(x)dx}\ dy + e^{\int p(x)dx}\ p(x)y\ dx = e^{\int p(x)dx}\ q(x)\ dx.$$

El lado izquierdo de la última expresión es igual a la diferencial del producto de funciones, por tanto,

$$d\left[e^{\int p(x)dx}\ y\right] = e^{\int p(x)dx}\ q(x)\ dx.$$

Integrando de ambos lados de la ecuación previa

$$e^{\int p(x)dx}\ y = \int e^{\int p(x)dx}\ q(x)\ dx + C,$$

finalmente, al despejar y, se llega a la misma expresión (40).

Ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas: ejemplos. Resuelve la ecuación diferencial $y' + \dfrac{2x+1}{x}\ y = e^{-2x}$.

Solución. Para resolver esta ecuación diferencial, usaremos la fórmula general dada en (40). Para comenzar, se distinguen los elementos $p(x)$ y $q(x)$

$$y' + \underbrace{\frac{2x+1}{x}}_{p(x)}\ y = \underbrace{e^{-2x}}_{q(x)}.$$

Aplicando la expresión dada en (40) con las notaciones de $y_h(x)$ y $y_p(x)$ ahí definidas, obtendremos para $y_h(x)$

$$y_h(x) = C_1\ e^{-\int p(x)\ dx},$$
$$y_h(x) = C_1\ e^{-\int \frac{2x+1}{x}\ dx} = C_1\ e^{-\int \frac{2x}{x}\ dx - \int \frac{1}{x}\ dx} = C_1\ e^{-2x-ln|x|},$$
$$y_h(x) = C_1\ e^{-2x}\ e^{-ln|x|} = C_1\ e^{-2x}\ e^{ln|x|^{-1}},$$
$$y_h(x) = C_1\ e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Y para la solución particular $y_p(x)$

$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)\int e^{\int \frac{2x}{x}dx + \int \frac{1}{x}dx} e^{-2x}\ dx,$$
$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)\int e^{2x+ln|x|} e^{-2x}\ dx,$$
$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)\int e^{2x}\ e^{ln|x|}\ e^{-2x}\ dx.$$

Así que las funciones exponenciales se simplifican por ser de signo contrario, resultando

$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)\int e^{ln|x|}\ dx,$$
$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)\int x\ dx,$$

integrando y efectuando operaciones

$$y_p(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^2}{2},$$
$$y_p(x) = \frac{x}{2}\ e^{-2x}.$$

Finalmente, la solución general es igual a $y = y_h(x) + y_p(x)$, es decir

$$y = C_1\ e^{-2x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2}\ e^{-2x}.$$

Como segundo ejemplo considera la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx}+3x^3y-x^3=0$ y calcula su solución.

Solución. Primero, la ecuación diferencial dada se lleva a la forma *normalizada* de una ecuación diferencial lineal no homogénea. Dividiendo entre x y expresando la ecuación diferencial en la forma dada en (34), obtendremos

$$y' + \underbrace{3x^2}_{p(x)} y = \underbrace{x^2}_{q(x)}.$$

Para la solución de la ecuación homogénea asociada, tenemos $y_h(x) = C_1\ e^{-\int p(x)\ dx}$, donde $p(x) = 3x^2$, por tanto

$$y_h(x) = C\ e^{-\int 3x^2\ dx},$$

lo cual, al integrar, resulta en

$$y_h(x) = C_1\ e^{-x^3}.$$

Para la solución particular

$$y_p(x) = e^{-\int 3x^2\ dx} \int e^{\int 3x^2\ dx}\ x^2\ dx.$$

Integrando las funciones exponenciales

$$y_p(x) = e^{-x^3} \int e^{x^3}\ x^2\ dx.$$

Para continuar, usamos el cambio de variable $u = x^3$, $du = 3x^2\ dx$, por lo que se requiere completar el diferencial multiplicando y dividiendo entre 3. Al hacerlo, la integral correspondiente es

$$\int e^{x^3}\ x^2\ dx = \frac{1}{3}\int e^u\ du = \frac{1}{3}\ e^u,$$

por lo que

$$y_p(x) = e^{-x^3}\ \frac{1}{3} e^{x^3},$$

que, al simplificar, se reduce a

$$y_p(x) = \frac{1}{3}.$$

Finalmente, la solución general es $y = y_h(x) + y_p(x)$, es decir

$$y = \underbrace{C\ e^{-3x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{y_p}.$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas: ejemplos. Considera la siguiente ecuación diferencial $sen(x)\ y' + sen^3(x)\ cos(x)\ y = 0$ y calcula su solución.

Solución. Llevando la ecuación diferencial a la forma de la expresión (34), resulta en

$$y' + \underbrace{sen^2(x)\ cos(x)}_{p(x)}\ y = \underbrace{0}_{q(x)},$$

que es una ecuación lineal de primer orden homogénea, por lo tanto se puede aplicar la fórmula general para resolverla.
Aplicando (40)

$$y = C_1\ e^{(-\int p(x)dx)},$$

$$y = C_1\ e^{(-\int sen^2(x)\ cos(x)\ dx)},$$

$$y = C_1\ e^{-\left(\frac{sen^3(x)}{3}\right)},$$

que es la solución general para esta ecuación diferencial.

Como segundo ejemplo, resuelve $y\ \frac{dx}{dy} + y^4 x = 0$.

Solución. Si la variable independiente es y, entonces la ecuación diferencial es lineal, homogénea y de primer orden. Por lo que se normaliza dividiendo toda la igualdad entre y, para que cumpla con la forma $x' + p(y)x = 0$

$$\frac{dx}{dy} + \underbrace{y^3}_{p(y)}\ x = 0,$$

por lo que $P(y) = y^3$.
Aplicando la fórmula general, que en este caso toma la forma

$$x = C_1\ e^{(-\int p(y)dy)},$$

$$x = C_1\ e^{(-\int y^3 dy)}.$$

Así, la solución queda

$$x = C_1\ e^{\left(-\frac{y^4}{4}\right)}.$$

Como tercer ejemplo, resuelve la ecuación diferencial $\dfrac{y'}{cos^2\theta} = sec^4\theta\ y$.

Solución. La ecuación diferencial se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{y'}{cos^2\theta} = \frac{y}{cos^4\theta}.$$

Normalizando la ecuación diferencial para que tenga la forma $y' + p(\theta)y = 0$, se multiplica toda la igualdad por $cos^2\theta$

$$y' = \frac{y}{cos^2\theta},$$

sumando y restando el término $\frac{y}{cos^2\theta}$ en ambos lados de la igualdad se obtiene la ecuación diferencial

$$y' - \frac{y}{cos^2\theta} = 0,$$

que también se puede expresar de la siguiente manera

$$y' - \underbrace{sec^2\theta}_{p(\theta)}\ y = 0,$$

$$p(\theta) = sec^2\theta.$$

Aplicando la fórmula general, que en este caso toma la forma:

$$y = C_1\ e^{(-\int p(\theta)\ d\theta)},$$

$$y = C_1\ e^{(-\int sec^2\theta\ d\theta)},$$

la solución general requerida es

$$y = C_1\ e^{(-tan\theta)}.$$