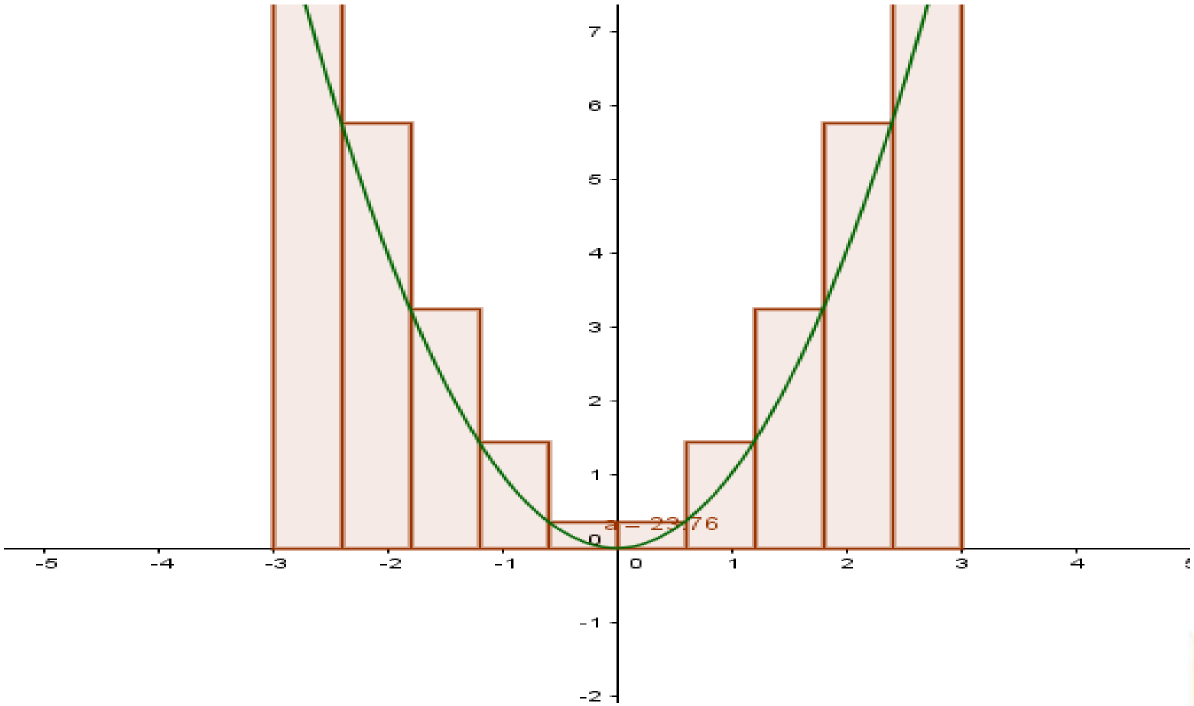
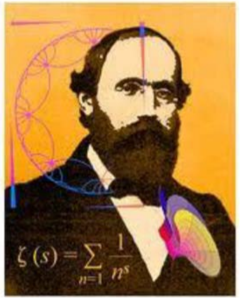
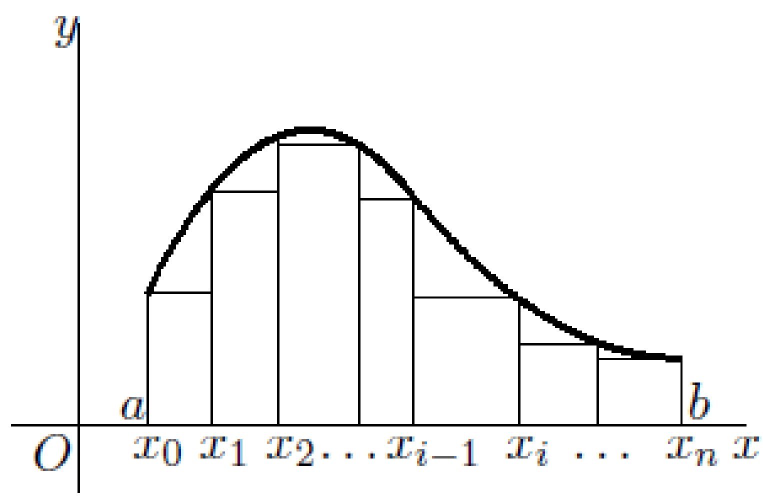
La Integral Definida e Indefinida



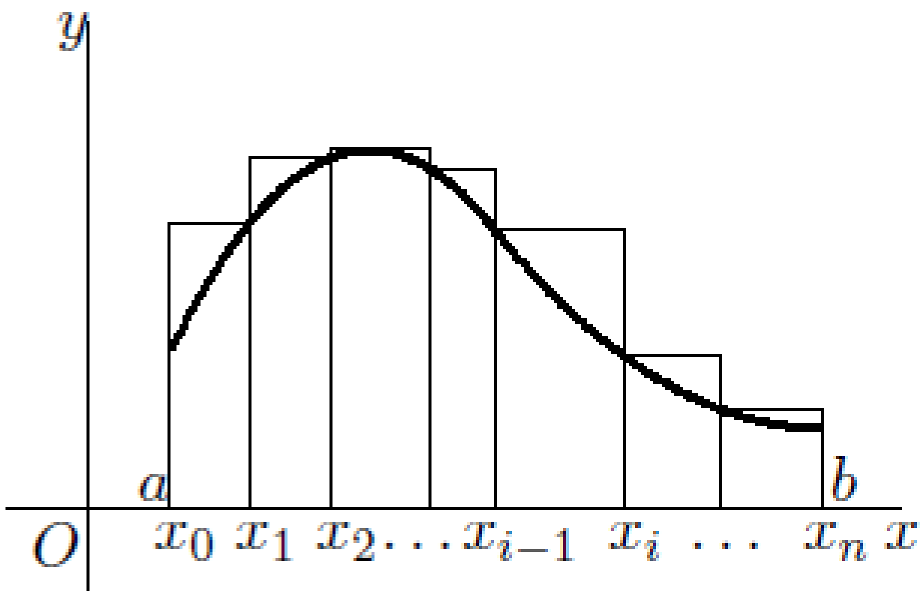


Concepto de sumas de Riemann

Si f es positiva, la suma inferior de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que tienen por base los subintervalos y la altura inferior de la función, que es menor o igual al área limitada por la función y el eje x.



Si f es positiva, la suma superior de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que tienen por base los subintervalos y la altura superior de la función, que es mayor o igual al área limitada por la función y el eje x.



$$\sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i)\Delta_i x$$

Una sumatoria es la suma de una sucesión de términos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

ésta se representa utilizando el símbolo sigma: $\sum$

$$\sum_{1=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Hallar el valor de la sumatoria $\sum_{i=1}^{5} i^2$

Solución:

Se sustituyen por i los valores de 1 a 5, se eleva cada uno de ellos al cuadrado y finalmente se suman estos resultados para obtener el valor de la sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

por tanto,

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55.$$

Propiedades de las sumatorias

1) $\sum_{i=a}^{n} k = (n-a+1)k$

2) $\sum_{i=a}^{n} [f(i)+g(i)] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$

3) $\sum_{i=a}^{n} c \cdot f(i) = c \cdot \sum_{i=a}^{n} f(i)$

4) $\sum_{i=1}^{n} [f(i)-f(i-1)] = f(n)-f(0)$

Calcular la suma

a) $$\sum_{i=3}^{7} 8.$$

b) $$\sum_{i=1}^{4} \left(i^2 + 3i\right).$$

Tarea:

Calcular las siguientes sumatorias

1) $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{2-i}{4}\right)$

2) $\sum_{n=3}^{8}\left(\frac{2}{n-1}\right)$

3) $\sum_{i=1}^{7}(3i-2)^3$

4) $\sum_{n=2}^{4}\left(n^2-4\right)$

5) $\sum_{i=4}^{10}\left(\frac{i-i^2}{3}\right)$

6) $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{ai+b}{2a}\right)$

7) $\sum_{n=2}^{4}\left(3n^2-5n+7\right)$

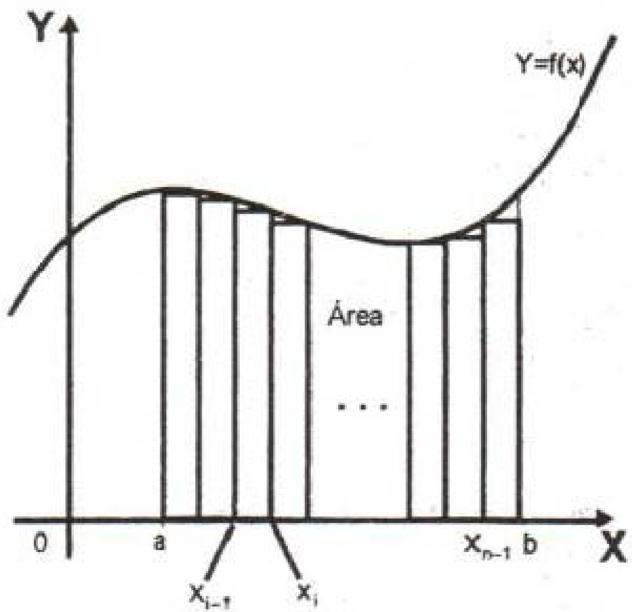
8) $\sum_{n=1}^{5}\frac{n(n+1)}{n+2}$

9) $\sum_{n=3}^{6}\left(n^3-n\right)$

10) $\sum_{i=1}^{9}\left(i^2-(i-1)^2\right)$

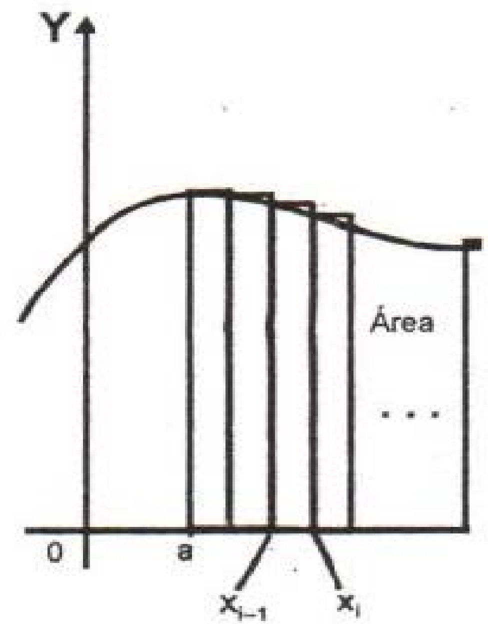
Sea una función definida en el intervalo [a,b], el área "A" bajo la gráfica f(x) en el intervalo dado, se puede obtener realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.

Rectángulos inscritos



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+(i-1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Sumatorias básicas

1) $\sum_{i=1}^{n} k = k\,n$

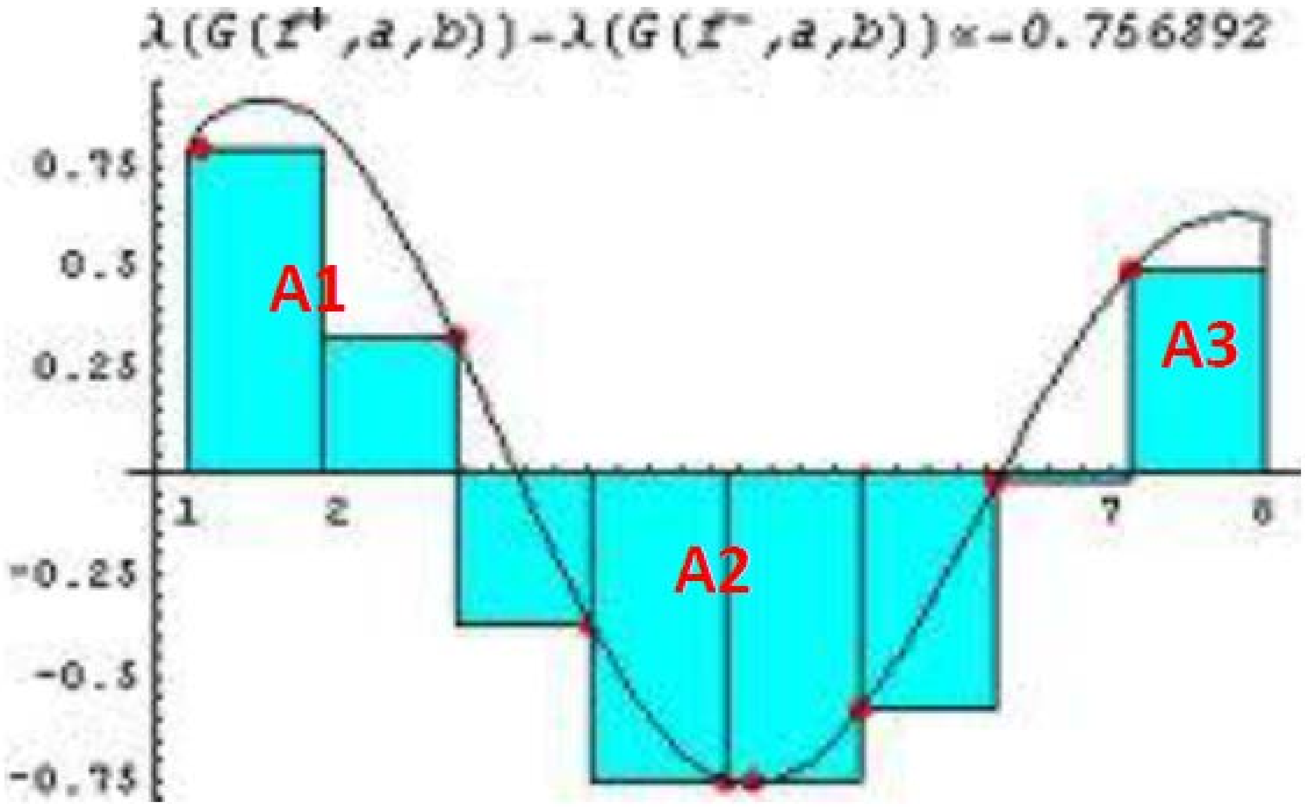
2) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \dfrac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

5) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \dfrac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

Es importante mencionar que los valores de x no están restringidos para valores negativos, para lo cual se tendrá la siguiente interpretación geométrica.



El área bajo la curva estaría dada de la siguiente forma:

A=A1 – A2 + A3

Hallar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ y el eje X en el intervalo $[1, 4]$ utilizando sumas superiores.

Hallar el área limitada por la recta $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ y el eje, mediante sumas superiores en el intervalo $[-2, 3]$

Tarea

Hallar el área empleando sumas superiores.

1) $f(x) = 4x + 5$; $x = 2$, $x = 5$

2) $f(x) = -2x + 6$; $x = 1$, $x = 4$

3) $f(x) = 4 - x^2$; $[-2, 2]$

4) $f(x) = x^3 - 4x$; $[-1, 1]$

5) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$; $x = 0$, $x = 2$

La integral definida

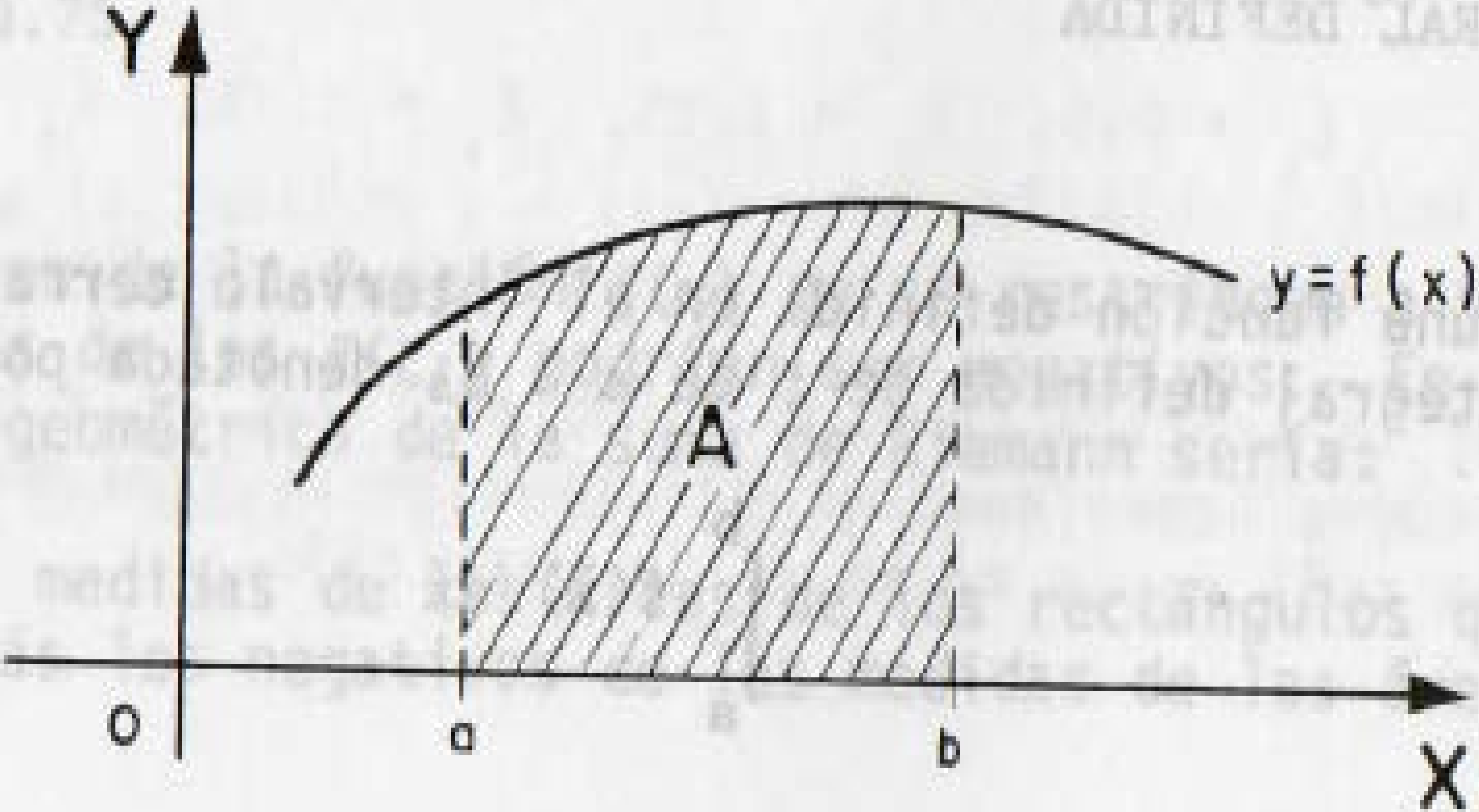
Si f es una función definida en el intervalo cerrado [a, b], entonces la integràl definida de f de a a b, denotada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

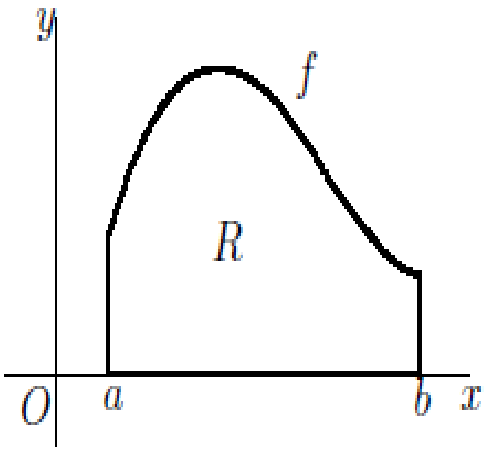
En la notación anterior, f(x) se llama *el integrando*, a y b son los *extremos de integración*; el valor a es el *extremo inferior* y el valor b es el *extremo superior*.

El símbolo $\int dx$ es el llamado *signo de integración*. Obsérvese que el signo de integración siempre contiene al de diferenciación.

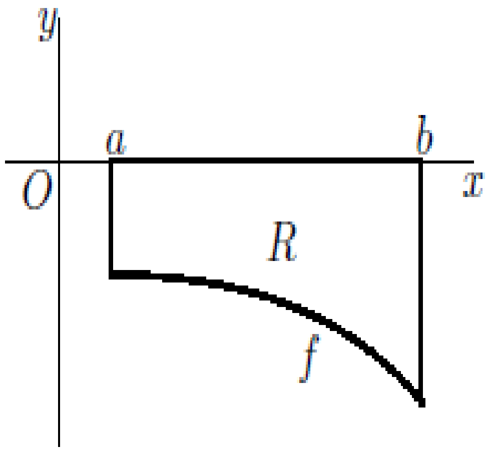
$$A = \int_a^b f(x) \quad dx$$



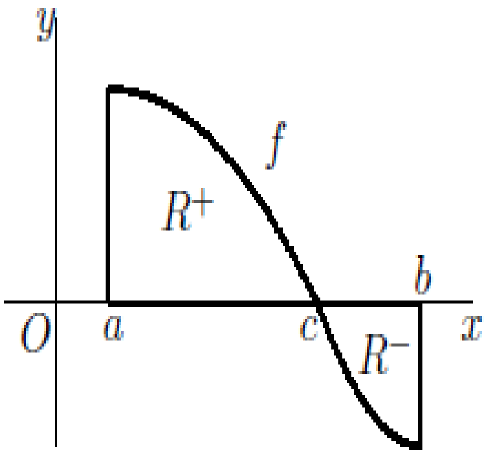
Interpretación geométrica de la integral



$$\int_a^b f(x)\,dx = A(R)$$
$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -A(R)$$
$$A(R) = -\int_a^b f(x)\,dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = A(R^+) - A(R^-)$$
$$A(R) = A(R^+) + A(R^-) =$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

Función integrable

Definición

Sea f una función continua en el intervalo [a,b].

1. f es integrable en [a,b] si hay un número denotado por $\int_a^b f(x)dx$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\epsilon_i)\Delta_i x$$

2. El número $\int_a^b f(x)dx$, si existe, se llama la integral definida de f desde a hasta b.

Teorema

Si f es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces es integrable.

Es conveniente aclarar que este teorema garantiza la existencia de $\int_a^b f(x)dx$ cuando f(x) es continua [a,b], pero en algunos casos puede existir esta integral a un cuando la función sea discontinua en algunos intervalos de [a,b]. En otras palabras, la condición de continuidad en un intervalo es suficiente pero no necesaria.

Propiedades de la integral definida

Teorema 1

Si c es una constante, entonces

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Teorema 2

Si f es integrable en [a,b] y si c es una constante, entonces

$$\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 3

Si f y g son funciones continuas en [a,b], entonces.

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 4

Si $a<c<b$ y f es integrable en [a,b], [a,c] y[c,b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Si f es una función continua en [a,b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Si f(a) existe, existe

$$\int_a^a f(a)dx = 0$$

Teorema Fundamental del Cálculo

El antecedente histórico de los conceptos básicos de la integral definida lo aportaron los antiguos griegos, principalmente el matemático Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C). Fue en el siglo XVII cuando Newton(1692-1727 d.C) y Leibniz(1646-1716 d.C) en forma independiente establecieron el área de una región limitada por una curva, evaluando una integral definida mediante una antiderivada, lo cual dio origen al Teorema Fundamental del Cálculo.

Antiderivada

Una función F será antiderivada de otra función f en un intervalo [a,b], si $F'(x)=f(x)$ para todo valor de x en un intervalo.

Ejemplo 1

Sea $F(x)=x^2+2$; entonces $F'(x)=2x$. Por la definición anterior, si $f(x)=F'(x)$, se tiene que $f(x)=2x$. Se observa que $f(x)$ es la derivada de $F(x)$ y por lo tanto $F(x)$ será antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo 2

Obtener una antiderivada de $f(x)=2x$

Una antiderivada de $f(x)=2x$ podría ser $F(x)=x^2$. Como se puede observar, tanto $F(x)= x^2$, como $F(x)= x^2+2$ podría ser antiderivada de $f(x)=2x$.

Teorema

La función f(x) tiene una antiderivada particular en [a,b] que es F(x). La antiderivada general de f(x) es F(x)+c ; donde c es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de f(x) se pueden obtener asignando algún valor particular a C.

Es decir debemos de encontrar una función que al derivarla de cómo resultado la función que se quiere integrar.

Calcular la integral

a) $\int_0^2 3z^2 dz$

Solución

Para calcular dicha integral, primero se obtiene una antiderivada o primitiva de la función del integrando $f(z) = 3z^2$. Para obtener el valor de la integral, primero es necesario evaluar esta antiderivada en 2 y en 0; luego se restan estos valores:

$$\int_0^2 3z^2 dz = z^3\Big|_0^2 = 8$$

Es importante hacer notar que la antiderivada $z^3 - 6$ (o cualquier otra) el resultado no cambia.

$$\int_0^2 3z^2 dz = (z^3 - 6)\Big|_0^2 = (2^3 - 6) - (0^3 - 6) = 8$$

b) $\int_{-2}^{-1} (3x^2 - 1) dx$

c) $\int_0^{2\pi} \cos x dx$

Teorema Fundamental del Cálculo

1. La función f(x) es continua en el intervalo [a,b].
2. Sea la función g(x) tal que g’(x)=f(x) para todo valor de x que pertenece al intervalo [a,b].

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

Formulas básicas de Integración

1. $\int du = u + c$
2. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$
3. $\int a\, udu = a \int udu$ a= constante
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ n diferente de -1
5. $\int sen\, u\, du = -cos\, u + c$
6. $\int cos\, u\, du = sen\, u + c$
7. $\int sec^2 u\, du = tan\, u + c$
8. $\int csc^2 u\, du = -cot\, u + c$
9. $\int sec\, u\, tan\, u\, du = sec\, u + c$
10. $\int csc\, u\, cot\, u\, du = -csc\, u + c$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = ang\, sen\, u + c$
12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} ang\, tan\, \frac{u}{a} + c$
13. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} ang\, sec\, \frac{u}{a} + c$

Calcular las siguientes integrales

- $\int x^4 dx$
- $\int_1^3 dx$
- $\int_{-1}^{-1/2} 2dx$
- $\int_0^3 2dx$
- $\int_{-1}^{1} (5x^2 - x) dx$
- $\int_{-1/2}^{1/2} (x^4 - 2x^2 + 1) dx$
- $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx$

- $\int \sec x \tan x \, dx$
- $\int_0^4 (1 - x)\sqrt{x} \, dx$
- $\int \frac{dx}{x^2}$
- $\int \frac{dw}{4+w^2}$

Ejercicios tipo examen

1) **Determinar el valor medio de la función $f(x) = 2 + |x|$ en el intervalo [-2,3]**

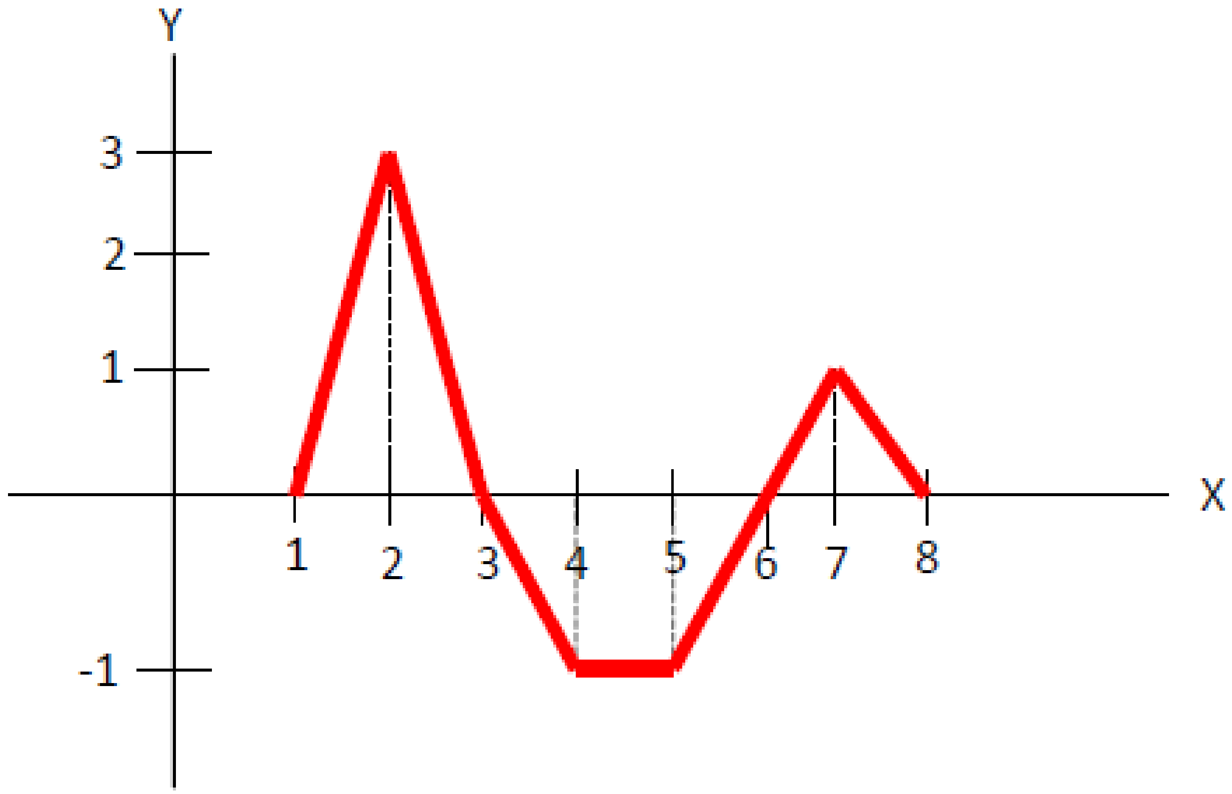
2) Sea la función $f(x)=x^3$ Determinar

a) El valor de $\int_0^1 f(x)dx$ utilizado el límite de las sumas de Riemann.

b) El valor promedio de f en el intervalo [0,1].

c) El valor de $x \in \mathbb{R}$ cuya existencia garantiza el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

3) Obtener el valor medio de la función f en el intervalo [1,8] si su gráfica es



4) Mediante el límite de Sumas de Riemann, Cálcular $\int_{-2}^{1}(-2x^2 + x)dx$

5) Para $\int_0^4 \frac{x^2}{2}\,dx$ calcular:

a) **Su valor por medio del límite de Sumas de Riemann.**

b) **El valor medio de la función en el intervalo [0,4].**

6) Mediante el límite de Sumas de Riemann, calcular $\int_0^1 (x+3)^2 dx$

Primer Método de Integración “Cambio de Variable”

Si se tiene $\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx$ donde f y g son funciones continuas en el intervalo mencionado, entonces el cambio de variable u=g(x) puede simplificar la integral a alguna forma conocida.

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x)dx$$

Estrategia para realizar un cambio de variable

1. Elegir una sustitución u=g(x). Usualmente, es mejor elegir la parte interna de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du = g'(x)dx$
3. Realizar el cambio de límites de integración.
4. Reescribir la integral en términos de la variable.
5. Calcular la integral

Ejercicios para clase

1) $\int_{-1}^{-2} \frac{dt}{(t+3)^3}$

2) $\int_{0}^{4} 2x\sqrt{x^2+9}\,dx$

3) $\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

4) $\int_{0}^{8} t(t+1)^{1/2} dx$

5) $\int_{0}^{\pi} x(sen\frac{x^2}{2})dx$

6) $\int_{1}^{4} \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}\,dx$