Continúa Tema 2.

Solución de Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior. Método de Variación de Parámetros y Tarea (Al final de las notas)

INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Este método aplica a ecuaciones diferenciales no homogéneas **de coeficientes constantes, de coeficientes variables**, y también aquéllas para las cuáles **no existe un operador diferencial anulador para la función** $q(x)$**.**

Debe quedar claro **que el método permite obtener una solución particular** (y_p) **de la ecuación no homogénea.**

Algunos ejemplos de ellas son los siguientes:

$$a)\ 2y'' - 3y' + 4 = 2 + x - e^{x} \ \leftarrow \text{ec. no homogénea de coeficientes ctes.}$$

$$b)\ y''' - y'' = \tan x \ \leftarrow \text{ec. no homogénea de coeficientes ctes, pero no existe operador anulador de la función q(x)}$$

$$c)\ x^2 y'' + xy' = \frac{2}{x^3} \ \leftarrow \text{ec. no homogénea de coeficientes variables, debe darse un conjunto fundamental de soluciones de la ec. homogénea asociada}$$

La descripción del método se presenta enseguida:

Consideremos la ecuación diferencial no homogénea de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = q(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (A)$$

Se observa que el **coeficiente del primer término es el escalar 1,** es decir, ***la ecuación no homogénea está en forma normalizada***

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots C_n y_n \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Donde $\{y_1 , y_2 , y_3 ,\ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Se establece como ***una solución particular de*** ***la ecuación no homogénea (A)*** , a la función

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + u_3(x)y_3 + ... + u_n(x)y_n \quad ....(C)$$

Se observa en (C) , que se han **sustituido las constantes esenciales y arbitrarias**

(parámetros) $C_1, \ C_2 \ , C_3 \ ,..., C_n$ de y_h **por las funciones**

$$u_1(x), u_2(x)y_2 \ , u_3(x)y_3 \ ,..., u_n(x)$$

ESTE PROCESO DE SUSTITUCIÓN DA NOMBRE AL MÉTODO: ***SE LE LLAMA VARIACIÓN DE PARÁMETROS***

Donde las funciones $u_1(x), u_2(x) \ , u_3(x) \ ,..., u_n(x)$, **son incógnitas,** tales que su ***primera derivada*** satisface el siguiente sistema matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 .... & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' .... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' .... & y_n'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' .... & y_n''' \\ \multicolumn{4}{l}{..............................} \\ \multicolumn{4}{l}{..............................} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & .... & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{matriz \ de \ coeficientes} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \\ u_3'(x) \\ . \\ . \\ . \\ u_n'(x) \end{bmatrix}}_{\substack{matriz \\ columna \\ de \\ incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ q(x) \end{bmatrix}}_{\substack{matriz \\ columna \\ de \ términos \\ independientes}}$$

Resolviendo este sistema matricial, por cualquiera de los métodos algebraicos que se conocen (Cramer, Gauss, etc.), se obtienen las funciones derivadas de la matriz columna (son las incógnitas). Posteriormente, se integran estas funciones, y el resultado obtenido se sustituye en (C) para obtener (y_p)

El proceso termina al sumar, como se ha mostrado en conceptos previos, las funciones (y_h) y (y_p) para obtener la solución general:

$$y_G = y_h + y_p$$

Algunos detalles conceptuales que es conveniente precisar se ilustrarán en los siguientes ejemplos.

1) Una ecuación no homogénea como la que se presenta a continuación, de coeficientes constantes, y para la cual existe un operador anulador de la función $q(x)$, **se puede resolver por el método de coeficientes indeterminados y también por variación de parámetros**. Se resolverá por este último, para ilustrar la descripción del método.

   Resolver la siguiente ecuación diferencial, por **el Método de Variación de Parámetros:**

   $y'' - y = e^x + 1$ ……(A)

   Solución:

   Por ser no homogénea, su solución general es de la forma $y_G = y_h + y_p$

   También se observa que está en forma normalizada (lo cual es fundamental para aplicar el método)

   Iniciamos con y_h :

   $$y'' - y = 0$$

   En términos del operador diferencial:

   $$\left(D^2 - 1\right)y = 0$$

   Su ecuación auxiliar y raíces:

   $$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \,,\, \lambda_2 = -1$$

   Por lo tanto $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ….. (B)

   De esta ecuación se tiene un conjunto fundamental de soluciones $\left\{ \underset{y_1}{e^x} \,,\, \underset{y_2}{e^{-x}} \right\}$

   Ahora, se obtiene y_p : Método de Variación de Parámetros

   Se sustituyen los parámetros de y_h por las funciones $u_1(x), u_2(x)$

   $$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

   $y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{-x}$ …..(C)

Donde las primeras derivadas $u_1'(x),\, u_2'(x)$ satisfacen el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ e^{x}+1 \end{bmatrix}}_{q(x)}$$

Resolviendo el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{x}+1 & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{0-\left(e^{x}+1\right)\left(e^{-x}\right)}{\left(e^{x}\right)\left(-e^{-x}\right)-\left(e^{x}\right)\left(e^{-x}\right)} = \frac{-1-e^{-x}}{-2} = \frac{1+e^{-x}}{2}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & e^{x}+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{\left(e^{x}\right)\left(e^{x}+1\right)-0}{\left(e^{x}\right)\left(-e^{-x}\right)-\left(e^{x}\right)\left(e^{-x}\right)} = \frac{e^{2x}+\ e^{x}}{-2}$$

Integrando cada función:

$$u_1 = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$u_2 = \int \left(-\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}\right)dx = -\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}$$

Sustituyendo en (C):

$$y_p = \underbrace{\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}e^{-x}\right)}_{u_1}e^{x} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}\right)}_{u_2}e^{-x}$$

Efectuando operaciones y simplificando:

$$y_p = \frac{1}{2}xe^{x}-\frac{1}{4}e^{x}-1 \Rightarrow y_G = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{x}-\frac{1}{4}e^{x}-1$$

A continuación se presenta **TAREA PARA ENVIAR EL MARTES 31 DE MARZO.**

TAREA PARA ENVIAR EL MARTES 31 DE MARZO. SE RECIBIRÁN HASTA LAS 18:00 HORAS. LAS QUE ENVÍEN POSTERIORES, YA NO PODRÁN REVISARSE.

RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES POR EL **MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS:**

NOTA: LES PIDO QUE SEAN ORDENADOS Y CLAROS EN SUS DESARROLLOS, SIN OMITIR NINGÚN PASO. ESTOS MÉTODOS SON MUY LABORIOSOS Y PARTE DE SU APRENDIZAJE RADICA EN COMPRENDER PERFECTAMENTE LA TEORÍA Y LOS CONCEPTOS INVOLUCRADOS.
SIGAN EL PROCESO MOSTRADO CLARAMENTE EN EL EJEMPLO DE LAS NOTAS DE CLASE DE ESTE DOCUMENTO, ESO LES AYUDARÁ A REFORZAR LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

1) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
2) $y'' - y = 2x + 4$