NOTAS PARA TERMINAR DE RESOLVER SERIE 2

Solución de Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior. Método de Variación de Parámetros. Enseguida se presentan otros ejemplos, con variantes respecto al ejemplo 1). Les permitirán terminar de resolver la Serie 2. Primero estúdienlas muy bien, se detalla la solución de los ejemplos

2) Una ecuación no homogénea como la que se presenta a continuación, de coeficientes constantes, **y para la cual no existe un operador anulador de la función**, **se puede resolver únicamente por el método variación de parámetros**.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación diferencial, por **el Método de Variación de Parámetros:**

$y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ ……..(A) Observar que está normalizada. Si no lo está debe normalizarse. También hay que notar que es de coeficientes constantes. Si no lo es, revisar el ejemplo que se presenta más adelante.

Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente manera , o bien, puede permanecer sin cambio:

$y'' + y = \sec x$. De cualquier manera, no existe anulador para la función $q(x)$

Solución:

Por ser no homogénea, su solución general es de la forma $y_G = y_h + y_p$

También se observa que está en forma normalizada (lo cual es fundamental para aplicar el método)

Iniciamos con y_h :

$$y'' + y = 0$$

En términos del operador diferencial:

$$\left(D^2 + 1\right) y = 0$$

Su ecuación auxiliar y raíces:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i , \lambda_2 = -i$$

Por lo tanto $y_h = \underbrace{C_1}_{parámetro} \cos x + \underbrace{C_2}_{parámetro} senx$ ….. (B)

De esta ecuación se tiene un conjunto fundamental de soluciones $\left\{ \underbrace{\cos x}_{y_1} , \underbrace{senx}_{y_2} \right\}$ Ahora, se obtiene y_p : **Método de Variación de Parámetros**

Se sustituyen los parámetros de y_h por las funciones $u_1(x), u_2(x)$ que son funciones desconocidas (incógnitas)

$$y_p = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2$$

$$y_p = \underset{\substack{\textit{función}\\ \textit{desconocida}}}{u_1(x)} \cos x + \underbrace{u_2(x)}_{\substack{\textit{función}\\ \textit{desconocida}}} \,senx \quad \text{.....(C)}$$

Donde las primeras derivadas de las funciones desconocidas $u_1'(x), u_2'(x)$ satisfacen el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos x & senx \\ -senx & -\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underbrace{\dfrac{1}{\cos x}}_{q(x)} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & senx \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & senx \\ -senx & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{0 - \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)(senx)}{\cos^2 x + sen^2 x} = \frac{\dfrac{-senx}{\cos x}}{1} = -\tan x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -senx & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & senx \\ -senx & -\cos x \end{vmatrix}} = \frac{(\cos x)\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)}{1} = 1$$

Integrando cada función:

$$u_1 = -\int \tan x \, dx = -\int \frac{senx}{\cos x} \, dx = \ln(\cos x)$$

$$u_2 = \int 1 \, dx = x$$

Sustituyendo en (C):

$$y_p = \underbrace{\ln(\cos x)}_{u_1}\cos x + \underbrace{x}_{u_2}\, senx$$

Finalmente, sustituyendo en la solución general: $y_G = y_h + y_p$

$$y_G = C_1 \cos x + C_2\, senx + \cos x\left(\ln x\right) + x senx$$

3) Otro caso, con variantes respecto a los ejemplos 1) y 2), se presenta cuando la ecuación diferencial no homogénea **<u>es de coeficientes variables</u>**. **<u>Se puede resolver únicamente por el método variación de parámetros</u>**. Para aplicarlo, debe tenerse ***<u>como dato un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada</u>*** (recordar los ejemplos de los incisos anteriores, siempre se parte de y_h para obtener y_p)

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $xy'' + y' - \frac{4}{x}y = x + x^3$, si se sabe que la solución de la homogénea asociada es $y_h = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$

Solución:

Esta es una ED no homogénea de coeficientes variables, y aunque existe operador anulador para $q(x)$, no puede aplicarse, por ser la ecuación de coeficientes variables. ***MUY IMPORTANTE SEÑALAR que la ED no está en forma normalizada, por lo que el primer paso es normalizarla;*** dividiendo entre x resulta :

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{4}{x^2}y = \underbrace{1 + x^2}_{q(x)}$$

Enseguida se establece que a partir de y_h , se tiene el conjunto fundamental de soluciones $\left\{ \underbrace{x^2}_{y_1} \ , \ \underbrace{x^{-2}}_{y_2} \right\}$, con lo que podemos continuar con el proceso, como se ha realizado en los ejemplos anteriores.

La forma de y_p es: $y_p = u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$

$$y_p = \underbrace{u_1(x)}_{\substack{\textit{función}\\ \textit{desconocida}}} \ x^2 + \underbrace{u_2(x)}_{\substack{\textit{función}\\ \textit{desconocida}}} \ x^{-2}$$

Donde las primeras derivadas de las funciones desconocidas $u_1'(x), u_2'(x)$ satisfacen el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underbrace{1 + x^2}_{q(x)} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ 1 + x^2 & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{0 - \left(x^{-2} + 1\right)}{-2x^{-1} - 2x^{-1}} = \frac{-\left(x^{-2} + 1\right)}{-4x^{-1}} = \frac{x^{-2} + 1}{4x^{-1}}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 1 + x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix}} = \frac{x^4 + x^2}{-2x^{-1} - 2x^{-1}} = \frac{x^4 + x^2}{-4x^{-1}}$$

Integrando cada función:

$$u_1 = \frac{1}{4}\int \frac{x^{-2}+1}{x^{-1}}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x}+x\right)\,dx = \frac{1}{4}\left(\ln x + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$u_2 = \int \frac{x^2+x^4}{-4x^{-1}}\,dx = \frac{-1}{4}\int (x^3+x^5)\,dx = -\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{24}$$

Entonces, una solución particular de la ED no homogénea es:

$$y_p = \frac{1}{4}\left(\ln x + \frac{x^2}{2}\right)x^2 - \left(\frac{x^4}{16} + \frac{x^6}{24}\right)x^{-2}$$

Y la solución general es:

$$y_G = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + y_p \leftarrow \text{Sólo se sustituye finalmente}$$

Es importante recordar, que si hubiese condiciones iniciales, se aplicarían en la solución general.

De esta forma se han cubierto los métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior (incluida la de primero orden en forma normalizada). Se tienen todos los elementos para resolver la serie 2 que entregarán el próximo viernes 10 de abril.