NOTAS DE CLASE

TEMA 3 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

INTRODUCCIÓN TEÓRICA Y EJEMPLOS

Con la finalidad de continuar desarrollando habilidades en el proceso de integración, de importante utilidad para asignaturas como Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Vectorial (entre otras), iniciaremos el estudio del los Métodos de Integración, así como de algunas Aplicaciones Geométricas.

3.1 Métodos de Integración

Estos métodos permiten que se puedan abordar integrales de mayor complejidad que las que se abordaron en el tema 2, reconocidas como inmediatas o, que con un cambio de variable elemental, se resuelven con relativa facilidad.

Los métodos de integración se clasifican en tres grupos:

- Integración por partes.
- Integración de expresiones trigonométricas e integración por sustitución trigonométrica.
- Integración por descomposición en fracciones parciales.

3.1.a Integración por partes.

Este método se fundamenta en la aplicación de la expresión (la cual debe memorizarse)

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

donde $u = u(x)$, $v = v(x)$

Este método aplica en los siguientes casos:

1. En el integrando se tiene un producto de funciones (que no generan integrales inmediatas)
2. Sólo hay una función en el integrando (funciones inversas, logarítmicas, entre otras)

Descripción:

El método consiste en la elección adecuada de u y dv . En esta elección considerar que $u = u(x)$ sea fácilmente diferenciable y dv fácilmente integrable; además la nueva integral que se genere $\int v\,du$ debe ser más sencilla que la original.

NOTAS DE CLASE

Ejemplo1: Calcule la integral $\int x e^{x} dx$

Solución:

Se observa que no es una integral inmediata, además de que se tiene un producto de funciones. Lo que sigue es realizar la asignación de los elementos u y dv. De acuerdo a lo mencionado, se tiene:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$dv = e^{x} dx \quad , \quad v = e^{x} + c_1$$

Enseguida se sustituye en la expresión que define el método: $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

$$\int \underset{u}{x}\, \underset{dv}{e^{x}dx} = \underbrace{\left(e^{x} + c_1\right) x}_{uv} - \int \underbrace{\left(e^{x} + c_1\right) dx}_{vdu}$$

Efectuando las operaciones y la integral del lado derecho (que es más sencilla que la original):

$$I = \int x e^{x} dx = x e^{x} + c_1 x - e^{x} - c_1 x + c_2$$

Resultado final $\Longrightarrow$ $I = x e^{x} - e^{x} + c$ *donde* $C_2 = C$

Ejemplo 2: Calcule la integral $\int x^{2} \ln x \, dx$

Solución:

El proceso es análogo al ejemplo1.

$$u = \ln x \qquad dv = x^{2} dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \int x^{2} dx = \frac{x^{3}}{3}$$

$$I = \int x^{2} \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^{2} dx \leftarrow \text{integral más sencilla que la original}$$

$$I = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

Ejemplo 3: (Doble Integración por partes): $\int x^2 e^x dx$

Solución: Nuevamente, siguiendo la metodología descrita:

$$u = x^2 \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = 2x\, dx \qquad v = \int e^x\, dx = e^x$$

Aplicando la expresión del método

$$I = u\,v - \int v\,du = x^2 e^x - \underbrace{2\int e^x (x\,dx)}_{\text{nuevamente por partes}}$$

Nuevamente integrando por partes

$$u = x \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$I = x^2 e^x - 2\left[\underbrace{x\,e^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x dx}_{vdu}\right] = x^2 e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x + c$$

Ejemplo 4: Integrar $\int e^x \cos x\, dx$

Este es un ejemplo interesante, pues las dos *<u>funciones del integrando tienen un comportamiento cíclico</u>*, lo que plantea un proceso con algunas variante respecto a los ejemplos anteriores.

Resolución:

Se denotará a la integral dada como $I = \int e^x \cos x\, dx$

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = e^x\, dx \qquad v = sen\, x$$

NOTAS DE CLASE

$$I = e^x \, sen\, x - \int \underbrace{e^x \, sen\, x \, dx}_{\substack{nuevamente\ por \\ partes}} \Longleftarrow$$ tiene una estructura similar a la integral original

$$u = e^x \qquad dv = sen\, x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$$

$$I = e^x\, sen\, x - \left[\underbrace{-\, e^x \cos x}_{uv} + \int \underbrace{\cos x\, e^x\, dx}_{vdu} \right]$$

$$I = e^x\, sen\, x + e^x \cos x - \int \cos x\, e^x\, dx$$

pero I es la integral original, entonces, sustituyendo:

$$\int \cos x\, e^x\, dx = e^x\, sen\, x + e^x \cos x - \int \cos x\, e^x\, dx$$

La integral original se encuentra en ambos miembros; por lo que se agrupan términos, para finalmente despejar:

$$\int \cos x\, e^x\, dx + \int \cos x\, e^x\, dx = e^x\, sen\, x + e^x \cos x$$

$$2\int \cos x\, e^x\, dx = e^x (sen\, x + \cos x)$$

$$\int \cos x\, e^x\, dx = \frac{1}{2} e^x (sen\, x + \cos x) + c$$

Ejemplo 5: Integrar $\int ln\, x\, dx$ **estas integrales se llaman de integrando único (una sola función en el integrando)**

Solución:

Cuando hay una sola función en el integrando, la única opción de asignación es como se muestra enseguida.

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$$

Llamando $I = \int \ln x\, dx \Longrightarrow I = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$

NOTAS DE CLASE

NOTA: A CONTINUACIÓN SE INDICA TAREA, PARA ENVIAR EL LUNES 30 DE MARZO

TAREA. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

FECHA DE ENVÍO: LUNES 30 DE MARZO

RESOLVER LAS INTEGRALES INDICADAS.

$a)\int x^2 e^{-x} dx$

$b)\int (senx) e^{2x} dx$

$c)\int ang\sec x \; dx$

$d)\int x \ln x^2 \, dx$

NOTA IMPORTANTE: LA SOLUCIÓN DE LA TAREA DEL 18 DE MARZO QUE SE SUBIÓ A PÁGINAS PERSONALES, SE ELIMINARÁ PARA SUBIR OTRAS SOLUCIONES. ESPERO QUE LAS HAYAN REVISADO PARA IDENTIFICAR SUS POSIBLES ERRORES.

TAMBIÉN LES COMENTO QUE SE ELIMINARÁN LOS ARCHIVOS CONFORME SE SUBEN OTROS.

SE SUBIRÁN NOTAS DURANTE EL FIN DE SEMANA, DE LOS SIGUIENTES MÉTODOS PARA QUE ESTUDIEN LA TEORÍA, CON SUS RESPECTIVAS TAREAS Y FECHAS DE ENTREGA.

LES PIDO QUE, SI TIENEN ALGUNA DUDA ME LO HAGAN SABER A TRAVÉS DEL CORREO, TRATARÉ DE ATENDERLA Y RESOLVERLA.

ES MUY IMPORTANTE QUE SE ESTUDIEN MUY BIEN LAS NOTAS DE CLASE DE TEORÍA, HE TRATADO DE QUE SEAN MUY CLARAS Y ORDENADAS, PERO LES PIDO POR FAVOR, SI DETECTAN ALGÚN ERROR (PROBABLEMENTE DE CAPTURA) ME LO HAGAN SABER.

DESEO QUE ESTA SITUACIÓN DE CONTINGENCIA NO SE PROLONGUE DEMASIADO, PERO ESTAMOS JUNTOS HACIENDO EL MEJOR ESFUERZO PARA AVANZAR EN NUESTRO CURSO.

SALUDOS A TODOS, ESPERANDO QUE USTEDES Y SU FAMILIA SE ENCUENTREN BIEN.

NOTAS DE CLASE