CONTINÚAN NOTAS DE CLASE. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

3.1.b.1 Integración de otras expresiones trigonométricas.

En el subtema anterior de integración por sustitución trigonométrica, los elementos fundamentales de apoyo fueron: un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras y diversas identidades trigonométricas para integrales cuyo integrando tuviera cierta estructura. Ahora se considerarán ***integrales cuyo integrando son funciones trigonométricas (que no son inmediatas), y que para integrarlas, se emplearán algunas de las identidades trigonométricas empleadas anteriormente***. Se ilustra a continuación con diversos ejemplos.

Ejemplos:

Efectuar las integrales indicadas y emplear las identidades que se consideren convenientes.

$$1) \quad \int \frac{sen^3 x}{\sqrt{cos\, x}}\, dx$$

La integral no puede resolverse de manera inmediata, pero se observa que la función seno y la función coseno están relacionadas, pues una es la derivada de la otra, por lo que podría recurrirse a la expresión $\int u^n\, du$, realizando un cambio de variable, sin embargo, el hecho de que ambas funciones tengan exponente, impide procederse de manera directa. Deberá buscarse que en el integrando sólo aparezca la función seno a la primera potencia. Considerando que su *exponente es impar*, es necesario factorizar de manera que se obtenga un factor cuadrático y un facto lineal; la función coseno con exponente fraccionario en este caso, no puede factorizarse para introducir alguna identidad. Teniendo la función seno con el factor cuadrático (de segundo grado), se introducirá una identidad trigonométrica, además de reordenar el integrando a una forma más sencilla para visualizar lo que se pretende:

$$1) \quad \int \frac{sen^3 x}{\sqrt{cos\, x}}\, dx = \int sen^3 x\,(cos\, x)^{-1/2}\, dx = \int sen\, x\; sen^2 x\,(cos\, x)^{-1/2}\, dx,$$

Aquí es donde conviene usar la identidad $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, de donde despejamos lo que sea de interés, en este caso $sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, que al sustituir en el integrando:

$$I = \int sen\, x\,(1 - cos^2 x)(cos\, x)^{-1/2}\, dx$$

Reordenando y efectuando operaciones se obtiene:

$$I = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\left(\cos x\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$I = \int \left[\left(\cos x\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\cos x\right)^{\frac{3}{2}}\right] \operatorname{sen} x \, dx = \int \underbrace{\left(\cos x\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x \, dx}_{\int u^n du} - \int \underbrace{\left(\cos x\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x \, dx}_{\int u^n du}$$

Las integrales del lado derecho son inmediatas, por lo que finalmente:

$$I = -2\left(\cos x\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\left(\cos x\right)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$2) \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$$

Como en el ejemplo 1) la integral no puede resolverse de manera inmediata, pero aquí nuevamente la función seno y la función coseno están relacionadas, pues una es la derivada de la otra, por lo que podría recurrirse a la expresión $\int u^n \, du$, realizando un cambio de variable, sin embargo, como en el ejemplo previo, el que ambas funciones tengan exponente diferente de 1, impide procederse de manera directa. Como puede verse, ahora la *función coseno* es la que tiene *exponente impar*, por lo que deberá buscarse que en el integrando sólo aparezca la función coseno a la primera potencia. Es necesario factorizar de manera que se obtenga un factor cuadrático y un facto lineal, además se introducirá una identidad trigonométrica y se reordenará el integrando a una forma más sencilla para visualizar lo que se pretende:

$$2) \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$I = \int \left(\operatorname{sen}^2 x\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x \, dx$$

$$I = \int \left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x\right) \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx - \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx$$

$$I = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

$3)\ \int cos^4 x\,dx$ ← En este caso se tiene una sola función en el integrando, y no hay manera de integrarla. Pero, si se logra incorporar la función seno de alguna manera, mediante un cambio de variable se tendría una integral de la forma $\int u^n\ du$

Para lograrlo, se realiza inicialmente una factorización, la cual permitirá utilizar la identidad que refiere a ángulo doble:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$I = \int cos^4 x\,dx = \int \left(cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\,2x\right)^2 dx$$

Desarrollando el binomio al cuadrado, se genera nuevamente un elemento cuadrático, en el que se emplea nuevamente la misma identidad.

$$I = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} cos\,2x + \frac{1}{4}\ cos^2\,2x\right) dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2x\,dx + \frac{1}{4}\int cos^2\,2x\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\,4x\right) dx$$

Se observa que las integrales que se obtienen son inmediatas:

$$I = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\,2x\,dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos\,4x\,dx$$

$$I = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4}\ sen\,2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} sen\,4x + C$$

$$I = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} sen\,2x + \frac{1}{32} sen\,4x + C$$

En casos similares, se usan las identidades que se han presentado a lo largo del método de integración por sustitución trigonométrica. Considerarlo para ejercicios posteriores.