Continúa Tema 2 y Tarea para enviar el próximo martes 24 de marzo

Para continuar ilustrando cambios de variable, así como el manejo de artificios algebraicos, se presentan los siguientes ejemplos; en los cuatro primeros incisos se emplearán las expresiones vistas previamente:

$$\int \sec u \, du = \ln\left(\sec u + \tan u\right) + C$$

$$\int \csc u \, du = \ln\left(\csc u - \cot u\right) + C$$

$$a) \int 3x^2 \sec\left(x^3\right) dx = \int 3x^2 \sec u \, \frac{1}{3x^2} du = \ln\left(\sec x^3 + \tan x^3\right) + C$$

$u = x^3$

$du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{3x^2} du$

$$b) \int \frac{\sec\left(\ln x^2\right)}{x} dx = \int \frac{\sec u}{x} \frac{x}{2} du = \frac{1}{2} \ln\left[\sec\left(\ln x^2\right) + \tan\left(\ln x^2\right)\right] + C$$

$u = \ln x^2$

$du = \dfrac{2x}{x^2} dx = \dfrac{2}{x} dx \Rightarrow dx = \dfrac{x}{2} du$

$$c) \int \frac{\csc(senx)}{\sec x} dx = \int \csc(senx) \cos x \, dx = \ln\left[\csc(senx) - \cot(senx)\right] + C$$

$u = senx$

$du = \cos x dx$

$$d) \int e^{\tan x} \csc\left(e^{\tan x}\right) \sec^2 x \, dx = \int \csc u \frac{\left(e^{\tan x} \sec^2 x\right)}{\left(e^{\tan x} \sec^2 x\right)} du = \ln\left[\csc\left(e^{\tan x}\right) - \cot\left(e^{\tan x}\right)\right] + C$$

$u = e^{\tan x}$

$du = e^{\tan x} \sec^2 x \, dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{e^{\tan x} \sec^2 x} du$

Otras expresiones de integración requieren del proceso algebraico de completar un trinomio cuadrado perfecto. Se ilustra con el siguiente ejemplo:

$\int \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx$ <u>ESTA INTEGRAL NO ES INMEDIATA, TAMPOCO APLICA UN CAMBIO DE VARIABLE ELEMENTAL</u>

Para hallar la antiderivada, primero deberá completarse un trinomio cuadrado perfecto y posteriormente realizar un cambio de variable.

$$x^2 - x + 1 = \underbrace{x^2 - x + \frac{1}{4}}_{\substack{\text{Este trinomio cuadrado} \\ \text{perfecto, se factoriza}}} - \frac{1}{4} + 1$$

$$x^2 - x + 1 = \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}_{u^2 + a^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx \leftarrow \text{esta es una integral de la forma} \int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Realizando el siguiente cambio de variable

$$u^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \;,\; a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces,

$$u = x - \frac{1}{2} \;,\; du = dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} ang\ \tan \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} ang\ \tan \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

Tarea para enviar el próximo martes 24 de marzo

Resolver:

1) $\int 2x\sec\left(\cos x^2\right)\operatorname{sen} x^2\,dx$

2) $\int \dfrac{\csc\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

3) $\int_0^4 \left|2x-6\right|\,dx$

Para resolver este inciso que involucra el valor absoluto de una función, consultar el antecedente en la liga

https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-8c/v/definite-integral-of-absolute-value

4) $\int \dfrac{dx}{x^2-2x+5}$

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$