ALUMNOS DE CÁLCULO INTEGRAL:

Enseguida se presentarán Notas de Clase del último Método de Integración del Tema 3 del Curso. Además, les comento que con la finalidad de agilizar el envío de notas de clase, compartir algunos link que pudiesen ser importantes y el envío de tareas; así como de la recepción y revisión de sus tareas, trataremos de probar el uso de una plataforma que se usa para clases en línea llamada Google Classroom. Para acceder a ella y registrarse como alumnos, deberán contar con una cuenta de Gmail. Ya he creado una clase (será para Cálculo Integral y en principio se ha incorporado una tarea y quiero ver si es fácil emplearla), y se ha generado **una Código de la Clase** para que ustedes accedan a ella y se registren, el Código es **mod5ucb**. Quiero que primero probemos si pueden acceder a ella sin problema y registrarse. Agradeceré me confirmen por correo si lo han logrado, para que yo monitoree su ingreso. **Al margen de que lo podamos establecer como medio de envío y recepción de documentos, todavía continuaremos con el envío de material a través de páginas personales. Las presentes notas deberán estudiarse muy bien, para resolver la tarea que se anexa al final del documento.**

3.1.c Integración por descomposición en Fracciones Parciales.

Este método consiste en resolver una integral (que no es inmediata) a partir de descomponer una función racional (integrando), en funciones racionales más simples a las cuales es posible aplicar las fórmulas de integración básicas. Este método también es llamado de Fracciones Simples.

Conceptos Teóricos

Una herramienta primordial para comprender el método, es saber hallar las raíces de un polinomio, las cuales pueden ser, de acuerdo a lo estudiado en Álgebra: raíces reales diferentes, raíces reales iguales, raíces complejas y combinación de todos los casos. En cada caso la descomposición en fracciones parciales es distinta.

Antes de ver cada caso, consideremos algunos aspectos generales.

Se tiene el integrando como una función racional $\int \frac{Q(x)}{R(x)}\,dx$, **donde el grado del numerador Q(x) es menor que el grado del denominador R(x).**

Caso 1) El denominador $R(x)$ es factorizable en términos de *raíces reales distintas.*

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{(x-m_1)(x-m_2)\ldots(x-m_n)} = \frac{A_1}{(x-m_1)}+\frac{A_2}{(x-m_2)}+\ldots+\frac{A_n}{(x-m_n)}$$

Cada factor refiere a las diferentes raíces $m_1, m_2, \ldots m_n$; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes

Ejemplo:

Efectuar $\int \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ **<u>Observar que el grado del numerador es menor que el grado del denominador (de no ser así, efectuar primero la división de polinomios)</u>**

El integrando se puede expresar como

$$\frac{x + 3}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{\overset{\text{constante desconocida}}{A_1}}{(x - 1)} + \frac{\overset{\text{constante desconocida}}{A_2}}{(x - 2)} \quad \ldots \text{(I)}$$

Interesa obtener los coeficientes A_1 , A_2

El método general para obtener estas constantes, consiste en generar un sistema de ecuaciones, el cual se forma de la siguiente manera: se multiplican ambos miembros por el denominador de (I)

$$\cancel{(x - 1)(x + 2)}\left[\frac{x + 3}{\cancel{(x - 1)(x - 2)}}\right] = \left[\frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2}\right](x - 1)(x - 2)$$

Al simplificar se obtiene:

$$x + 3 = A_1(x - 2) + A_2(x - 1) \quad \longleftarrow \quad \text{Ecuación básica}$$

Desarrollando operaciones en el segundo miembro y agrupando términos

$$x + 3 = A_1(x - 2) + A_2(x - 1)$$

$$x + 3 = A_1 x - 2A_1 + A_2 x - A_2$$

$$x + 3 = (A_1 + A_2)x - 2A_1 - A_2$$

Por igualdad de coeficientes de funciones se genera el siguiente sistema y su solución:

$$1 = A_1 + A_2$$

$$3 = -2A_1 - A_2$$

Y su solución es: $A_1 = -4 \; ; \; A_2 = 5$

Sustituyendo estos valores en (I)

$$\frac{x + 3}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{-4}{(x - 1)} + \frac{5}{(x - 2)}$$

De aquí, regresamos a la integral original:

$$\int \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \int \frac{x + 3}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-4}{(x-1)}\,dx + \int \frac{5}{(x-2)}\,dx$$

Como se observa, las integrales últimas del lado derecho son inmediatas, que es lo que se pretende con este método. Por lo que finalmente

$$\int \frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2}\, dx = -4 \ln|x - 1| + 5 \ln|x - 2| + C$$

Caso 2) El denominador $R(x)$ es factorizable en términos de *__raíces reales repetidas__*.

$\dfrac{Q(x)}{R(x)} = \dfrac{Q(x)}{(x - m)^n}$, donde *n* es el número de veces que se repite la raíz y *m* es la raíz

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{(x - m)^n} = \frac{A_1}{(x - m)} + \frac{A_2}{(x - m)^2} + \ldots + \frac{A_3}{(x - m)^n}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ son constantes y m es la raíz

Ejemplo:

Efectuar $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{(x + 1)^2}\, dx$ **__Observar que el grado del numerador es menor que el grado del denominador (de no ser así, efectuar primero la división de polinomios)__**

El integrando se puede expresar como

$$\frac{2x - 1}{(x + 1)^2} = \underbrace{\frac{A_1}{(x + 1)}}^{\text{constante desconocida}} + \underbrace{\frac{A_2}{(x + 1)^2}}^{\text{constante desconocida}} \quad \ldots \text{(I)}$$

Interesa obtener los coeficientes A_1, A_2

El método general para obtener estas constantes, como en el caso anterior, consiste en generar un sistema de ecuaciones, el cual se forma de la siguiente manera: se multiplican ambos miembros por el denominador de (I)

$$\cancel{(x + 1)^2} \left[\frac{2x - 1}{\cancel{(x + 1)^2}} \right] = \left[\frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} \right] (x + 1)^2$$

Al simplificar se obtiene:

$2x - 1 = A_1(x + 1) + A_2$ ⟵ Ecuación básica

Desarrollando operaciones en el segundo miembro y agrupando términos

$$2x - 1 = A_1 x + \left(A_1 + A_2\right)$$

Por igualdad de coeficientes de funciones se genera el siguiente sistema y su solución:

$$2 = A_1$$
$$-1 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = -1-2 = -3$$

Entonces la solución del sistema es: $A_1 = 2 \; ; \; A_2 = -3$

Sustituyendo estos valores en (I)

$$\frac{2x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)} + \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

De aquí, regresamos a la integral original:

$$\int \frac{2x - 1}{\left(x + 1\right)^2} dx = \int \frac{2}{\left(x + 1\right)} dx - \int \frac{3}{\left(x + 1\right)^2} dx$$

$$\int \frac{2x - 1}{\left(x + 1\right)^2} dx = \int \frac{2}{\left(x + 1\right)} dx - \int 3\left(x + 1\right)^{-2} dx$$

Como se observa, las integrales últimas del lado derecho son inmediatas, que es lo que se pretende con este método. Por lo que finalmente

$$\int \frac{2x - 1}{\left(x + 1\right)^2} dx = 2\ln\left(x + 1\right) + \frac{3}{\left(x + 1\right)^2} + C = \ln\left(x + 1\right)^2 + \frac{3}{\left(x + 1\right)^2} + C$$

Caso 3) El denominador $R(x)$ es un factor cuadrático irreducible (es decir, sus raíces son complejas)

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{\left(x^2 + px + q\right)} = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \; , \; p,q \in \mathbb{R} \; , \quad A, B \text{ son constantes}$$

Efectuar $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x\left(x^2 + 1\right)} dx$ **<u>Observar que el grado del numerador es menor que el grado del denominador (de no ser así, efectuar primero la división de polinomios)</u>**

Este es un ejemplo en el que se combina el Caso 1 y el Caso 3 (aquí el término cuadrático tiene *p=0* y *q=1*)

El integrando se puede expresar como $\dfrac{x^2 - 1}{x\left(x^2 + 1\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 1}$, …(I)

cómo se ha mencionado en los ejemplos anteriores *A, B* y *C* son constantes desconocidas.

El método general para obtener estas constantes, como se ha mencionado, consiste en generar un sistema de ecuaciones, el cual se forma de la siguiente manera: se multiplican ambos miembros por el denominador de (I)

$$\cancel{x\left(x^2 + 1\right)}\left[\frac{x^2 - 1}{\cancel{x\left(x^2 + 1\right)}}\right] = \left[\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}\right]x\left(x^2 + 1\right)$$

Al simplificar se obtiene:

$$x^2 - 1 = A\left(x^2 + 1\right) + \left(Bx + C\right)x \quad \longleftarrow \quad \text{Ecuación básica}$$

Desarrollando operaciones en el segundo miembro y agrupando términos

$$x^2 - 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x^2 - 1 = \left(A + B\right)x^2 + Cx + A$$

Por igualdad de coeficientes de funciones se genera el siguiente sistema y su solución:

$$A + B = 1 \quad \Rightarrow B = 2$$

$$A = -1$$

$$C = 0$$

Sustituyendo estos valores en (I)

$$\frac{x^2 - 1}{x\left(x^2 + 1\right)} = \frac{-1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Regresando a la integral original:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x\left(x^2 + 1\right)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx \quad \int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx$$

Como se observa, las integrales últimas del lado derecho son inmediatas, que es lo que se pretende con este método. Por lo que finalmente

$$\int \frac{x^2 - 1}{x\left(x^2 + 1\right)}\, dx = -\ln x + \ln\left(x^2 + 1\right) + C = \ln x^{-1} + \ln\left(x^2 + 1\right) + C$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{x\left(x^2 + 1\right)}\, dx = \ln\frac{1}{x} + \ln\left(x^2 + 1\right) + C = \ln\left[\left(x^2 + 1\right)\frac{1}{x}\right] + C \leftarrow \textit{se han aplicado propiedades}$$

PARA VER VARIEDAD DE EJEMPLOS, CONSULTAR LA SIGUIENTE LIGA

https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-integration-new/bc-6-12/v/integration-with-partial-fractions

TAREA PARA ENVIAR EL MIÉRCOLES 15 DE ABRIL. SERÁ POR CORREO ELECTRÓNICO COMO HASTA AHORA.

ATENDER LO QUE SE INDICA EN ESTE DOCUMENTO, ACERCA DE REGISTRASE EN GoogleClassroom. Si hay problemas para registrarse informarme por correo electrónico. Y si no funciona, seguiremos trabajando como hasta ahora a través de páginas personales.

Si hay dudas para resolver la tarea , envíenlas por correo. Pero deben estudiar perfectamente estas notas y resolver nuevamente los ejemplos que les presento, para comprender el proceso algebraico que debe seguirse.

Resolver

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$ Solución: $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x-1}{x+1}\right] + C$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\, dx$ Solución: $5\ln(x-2) - \ln(x+2) - 3\ln x + C$

NOTA: EN LAS SIGUIENTES NOTAS SE PRESENTARÁN EJEMPLOS CON MÁS VARIANTES.